V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

8º e 9º ano do Ensino Fundamental

Fase Final - 23 de outubro de 2010

Gabarito Fase Final

1. Denotamos por m o número de meninas, logo $19 - m$ corresponde ao número de meninos. Seja x a quantidade em reais que corresponde a cada menina, logo cada menino recebe $150 + x$. Sendo R\$ 5.000,00 a quantidade total de dinheiro a ser distribuída, obtemos

$$mx + (19 - m)(x + 150) = 5000.$$
$$19x - 150m = 2150$$
$$x = \frac{150m + 2150}{19}$$
$$x = \frac{2147 + 133m}{19} + \frac{3 + 17m}{19}$$
$$x = 113 + 7m + \frac{3 + 17m}{19}$$

Como x é inteiro, $3 + 17m$ é divisível por 19. É fácil ver, então, que $m = 11$. Logo, cada menina receberá R\$ 200,00 reais e cada menino R\$ 350,00.

2. Denote por $\mathcal{A}(\Delta XYZ)$ a área de um triângulo XYZ e por $\mathcal{A}(trap.ABMN)$ a área do trapézio $ABMN$. Por hipótese

$$\frac{\mathcal{A}(\Delta CMN)}{\mathcal{A}(\Delta ABC)} = \frac{1}{3}.$$

Logo

$$\frac{\mathcal{A}(trap.ABMN)}{\mathcal{A}(\Delta ABC)} = \frac{\mathcal{A}(\Delta ABC) - \mathcal{A}(\Delta CMN)}{\mathcal{A}(\Delta ABC)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Como a soma dos alunos das três turmas é 95 e o resto da divisão de 1400 por 95 é 70, isto é, $1400 = 95 \times 14 + 70$, caso fosse possível tal distribuição de lápis, os alunos de uma turma terão que receber um lápis a mais ou a menos do que os das outras duas turmas. Denote por x e $x + 1$ o número de lápis recebido pelos alunos. Temos as seguintes distribuições possíveis:

(a) 1400=20x+(35+40)(x+1)=95x + 75,
(b) 1400=35x+(20+40)(x+1)=95x + 60,
(c) 1400=40x+(20+35)(x+1)=95x + 55,
(d) 1400=40(x+1)+(20+35)x=95x + 40,
(e) 1400=35(x+1)+(20+40)x=95x + 35,
(f) 1400=20(x+1)+(35+40)x=95x + 40.

Como nenhum resto nas divisões de (a) a (f) são da forma $70 + 95k, k = 0, 1$, concluímos que não é possível fazer a divisão proposta no exercício.

4. Se Maria não pode dizer se a soma dos números escolhidos por João é par ou ímpar, existe mais de uma forma de obter esse produto. Observamos que escolhendo cinco números de duas formas diferentes, isto é, escolhendo cinco números formando um subconjunto A e outros cinco números formando um subconjunto B, ao fazermos o produto dos cinco números do subconjunto A e o produto dos cinco números do subconjunto B, eles só serão iguais se, ao considerarmos os dois números que não foram escolhidos para o subconjunto A e fazermos a multiplicação destes dois números, esta deverá ser igual a multiplicação dos dois números que não foram escolhidos para o subconjunto B. Temos duas possibilidades para isso:

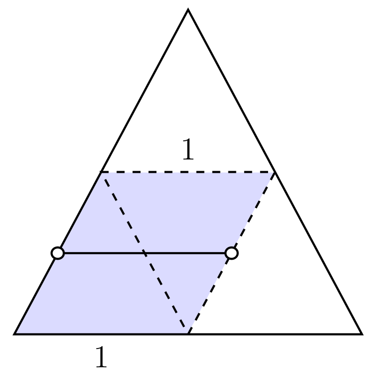
   1a. Possibilidade: $2 \times 3 = 6 \times 1$ e,

   2a. Possibilidade: $3 \times 4 = 2 \times 6$.

   Se a 1a. possibilidade acontecer, temos as escolhas para o produto de João: $1 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$ e $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 840$, mas $1 + 4 + 5 + 6 + 7 = 23$ e $2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 21$ que são números ímpares.

   Se a 2a. possibilidade acontecer, $1 \times 2 \times 5 \times 6 \times 7 = 420$ e $1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$, com $1 + 2 + 5 + 6 + 7 = 21$ ímpar e $1 + 3 + 4 + 5 + 7 = 20$ par. Portanto, a resposta é 420.

5. Abrimos o tetraedro pelo vértice oposto à base e em seguida o estendemos sobre o chão. Observamos que o caminho de menor comprimento corresponde ao comprimento da reta que passa pelos dois pontos médios. O comprimento desta reta é igual a 1, pois este é o comprimento dos lados do paralelogramo formado pelas duas faces do tetraedro sobre as quais passa a reta. Veja a figura abaixo.


1
1