V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível I

6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental

Fase Final - 23 de outubro de 2010

Gabarito Fase Final

1. **(a)** Sendo que os três copos são iguais temos que o conteúdo de uma garrafa equivale

$$\frac{1}{4} \text{ de um copo } + \frac{1}{6} \text{ de um copo } + \frac{1}{8} \text{ de um copo } = \frac{13}{24} \text{ de um copo.}$$

Daí,

- 1 garrafa equivale a $\frac{13}{24}$ de um copo;
- 2 garrafas equivalem a $\frac{26}{24}$ de um copo, isto é, 1 copo $+\frac{2}{24}$ de um copo;
- 3 garrafas equivalem a 1 copo $+\frac{15}{24}$ de um copo;
- 4 garrafas equivalem a 1 copo $+\frac{28}{24}$ de um copo, isto é, 2 copos $+\frac{4}{24}$ de um copo;
- 5 garrafas equivalem a 2 copos $+\frac{17}{24}$ de um copo;
- 6 garrafas equivalem a 2 copos $+\frac{30}{24}$ de um copo, isto é, 3 copos $+\frac{6}{24}$ de um copo;

Portanto, são necessárias pelo menos seis garrafas para encher os três copos; consequentemente, os amigos tiveram que abrir mais cinco garrafas.

(b) Como visto no item (a) sabemos que 1 garrafa equivale a $\frac{13}{24}$ de um copo. Portanto, ao dividir este conteúdo em três partes iguais os amigos terão:

$$\frac{13}{24} \div 3 = \frac{13}{72} \text{ do seu copo com suco.}$$

2. Ao dobrar a folha a primeira vez João Pedro faz 2 furos; assim, ele conta 1+2=3 furos (lembre-se que ele já havia furado a folha uma vez). Ao dobrar a folha a segunda vez, João Pedro faz 4 furos; então, ele conta 1+2+4=7 furos. Ao dobrar a folha a terceira vez, João Pedro faz 8 furos; então, ele conta 1+2+4+8=15 furos. Note que temos até aqui o seguinte:

- com a primeira dobra: $1 + 2^1 = 2^2 - 1$ furos;

- com a segundo dobra: $1 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1$ furos;
- com a terceira dobra: $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$ furos.

Logo, fica fácil perceber que após a n-ésima dobra João Pedro terá feito $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ furos. Agora, fazendo uma “continha”vemos que

$$2^9 - 1 < 1000 < 2^{10} - 1.$$

Portanto, João Pedro irá obter mais que 1000 furos a partir da nona dobra.

3. Fatorando em números primos temos que $1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$. Como queremos realizar paradas regulares que têm por medida um número inteiro, consideremos as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned}
1440 &= 1440 \times 1,\\
1440 &= 720 \times 2,\\
1440 &= 480 \times 3,\\
1440 &= 360 \times 4,\\
1440 &= 288 \times 5,\\
1440 &= 240 \times 6,\\
1440 &= 180 \times 8,\\
1440 &= 160 \times 9.
\end{aligned}$$

A partir dos produtos considerados, respeitando a recomendação de parar a cada 200 km, conclui-se que devemos realizar paradas a cada 180 km, num total de 8 contada a última parada, isto é, quando atinge-se o destino pretendido.

4. Vamos chamar o barco azul de **A** (1 hora), o barco laranja de **L** (2 horas), o barco branco de **B** (4 horas) e o barco vermelho de **V** (8 horas). O menor tempo gasto é 15 horas, fazendo, por exemplo, o seguinte translado: o marinheiro Popeye leva os barcos **A** e **L** e volta com o barco **A**; em seguida, leva os barcos **V** e **B** e volta com o barco **L**; para terminar, leva os barcos **A** e **L**. Para chegarmos a este resultado, temos que observar que os barcos **V** e **B** devem ser transladados juntos, mas não devemos voltar com o barco **V** ou **B**. Desta forma, devemos iniciar o trajeto com os barcos **A** e **L** , voltando com um deles, em seguida, levar os barcos **V** e **B** e voltar com o barco que estava na outra margem, **A** ou **L**. Finalmente, completar o translado com os barcos **A** e **L**.

5. Se Maria não pode dizer se a soma dos números escolhidos por João é par ou ímpar, existe mais de uma forma de obter esse produto. Observamos que escolhendo cinco números de duas formas diferentes, isto é, escolhendo cinco números formando um subconjunto A e outros cinco números formando um subconjunto B, ao fazermos o produto dos cinco números do subconjunto A e o produto dos cinco números do subconjunto B, eles só serão iguais se, ao considerarmos os dois números que não foram escolhidos para o subconjunto A e fazermos a multiplicação destes dois

números, esta deverá ser igual a multiplicação dos dois números que não foram escolhidos para o subconjunto B. Temos duas possibilidades para isso:
1a. Possibilidade: $2 \times 3 = 6 \times 1$ e,
2a. Possibilidade: $3 \times 4 = 2 \times 6$.
Se a 1a. possibilidade acontecer, temos as escolhas para o produto de João: $1 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$ e $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 840$, mas $1 + 4 + 5 + 6 + 7 = 23$ e $2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 21$ que são números ímpares.
Se a 2a. possibilidade acontecer, $1 \times 2 \times 5 \times 6 \times 7 = 420$ e $1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$, com $1 + 2 + 5 + 6 + 7 = 21$ ímpar e $1 + 3 + 4 + 5 + 7 = 20$ par.

Portanto, a resposta é 420.