V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

8^o e 9^o ano do Ensino Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 15 a 17 de setembro de 2010

- **Cada questão vale 1 ponto (total de pontos do nível II-fase de seleção = 10 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova e os rascunhos dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 27 de setembro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 30 de setembro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO

No da Questão	Resposta
Questão No 1	B
Questão No 2	E
Questão No 3	D
Questão No 4	D
Questão No 5	C
Questão No 6	D
Questão No 7	D
Questão No 8	E
Questão No 9	C
Questão No 10	A

1. Consideremos $N = ab$, o qual invertido se torna um número ímpar, isto é, $M = ba$ é ímpar. Logo, a não pode ser par e, portanto, para a temos as seguintes possibilidades: 1, 3, 5, 7, 9. Porém, como ab é o quadrado de um número natural as únicas duas possibilidades para N são: 16 ou 36. Daí,

$$M - N = 61 - 16 = 45 \quad \text{ou} \quad M - N = 63 - 36 = 27 = 3^3;$$

sabemos, por hipótese, que $M-N$ é o cubo de um número natural; logo, $M-N = 27$. Portanto, $N = 36$ e $a + b = 9$.

Resposta: (B)

2. Se a prova tinha 50 questões, então 20 questões eram de matemática, 20 de português e 10 de língua estrangeira. Aninha acertou:
• 40% das questões de português $\rightarrow$ 8 questões de português;
• 70% das questões de matemática $\rightarrow$ 14 questões de matemática;
• 60% do total de questões $\rightarrow$ 30 questões.
Logo, Aninha acertou $30 - 14 - 8 = 8$ questões de língua estrangeira, em um total de 10, o que corresponde a 80 % das questões de língua estrangeira.

Resposta: (E)

3. Observamos primeiramente que $8 \times 50 = 400$ e que $7 \times 57 = 399$. Ou seja, temos 50 múltiplos de 8 e 57 múltiplos de 7 que são menores que o número 400. Porém, como $mmc\{7, 8\} = 56$, temos sete números menores que 400 que são múltiplos de 7 e 8 ao mesmo tempo. Como $50 + 57 - 7 = 100$, temos que 400 é o centésimo número escrito.

Resposta: (D)

4. Somar cinco números consecutivos é equivalente a somar, para algum n,

$$(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 5n + 15 = 5(n + 3).$$

Sabemos que $5(n + 3)$ tem final 0 ou 5; por hipótese, $5(n + 3) = 200*$, sendo que $*$ não é zero; logo, $* = 5$.

Resposta: (D)

5. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que a medida y do segmento de reta ligando A a B é

$$y = \sqrt{100^2 + 75^2} = \sqrt{125^2} = 125.$$

Logo, o gasto com fios é $125 \times 5 + 925 \times 3 = 3400$.

Resposta: (C)

6. Considere dois números a e b naturais , distintos do zero. Pode-se provar que

$$a + b \leq ab + 1.$$

De fato,

$$a+b=\underbrace{1+\ldots+1}_{a-vezes}+\underbrace{1+\ldots+1}_{b-vezes}=$$

$$=1+\underbrace{1+\ldots+1}_{(a-1)-vezes}+\underbrace{1+\ldots+1}_{b-vezes}\leq 1+\underbrace{\underbrace{1+\ldots+1}_{(a-1)-vezes}+\ldots+\underbrace{1+\ldots+1}_{(a-1)-vezes}}_{b-vezes}+\underbrace{1+\ldots+1}_{b-vezes}=$$

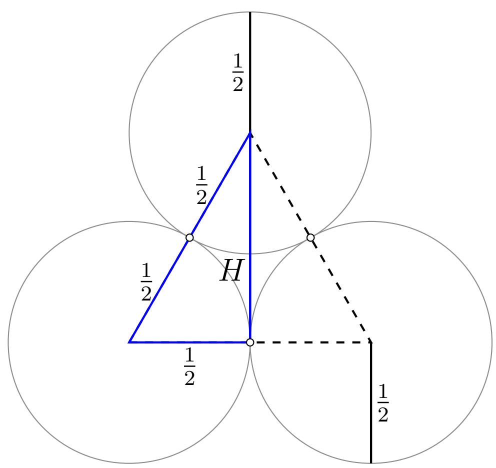
$$=1+\underbrace{\underbrace{1+\ldots+1}_{a-vezes}+\ldots+\underbrace{1+\ldots+1}_{a-vezes}}_{b-vezes}=1+ab$$

Portanto, considerando-se o produto de um milhão de números naturais igual a um milhão, contendo a e b, substituindo-se $a\times b$ por $(ab)\times 1$ obtêm-se assim, outro produto de um milhão de números naturais igual a um milhão, porém com soma maior.

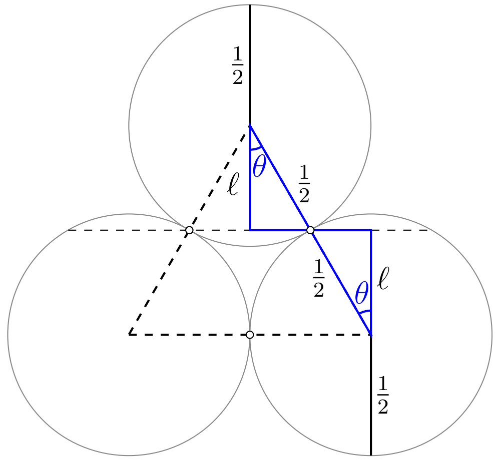
O processo acima pode ser repetido no máximo 999.999 vezes e, então, o produto de soma maior possível é $1.000.000\times\underbrace{1\times\ldots\times 1}_{999.999-vezes}$, cuja soma é 1.999.999.

Resposta: (D)

7. Apresentamos duas maneiras de responder esta pergunta.



Resposta 1: $h=H+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Utilizando Pitágoras observamos que $H=\frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $h=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$.



Resposta 2: $h = 2\ell + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, sendo $\ell = \cos\theta \cdot \frac{1}{2}$. Observamos que $\theta = \frac{\pi}{6}$, logo $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto $h = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

Resposta: (D)

8. Denote por p_T e p_P as populações que Tucupira e Pirajussaraí tinham a três anos atrás, respectivamente. Como a população de Tucupira cresceu 50%, atualmente sua população é $p_T + \frac{1}{2}p_T$. Mas por hipótese

$$p_P = p_T + \frac{1}{2}p_T, \tag{1}$$

e

$$p_P + p_T + \frac{1}{2}p_T = 9000. \tag{2}$$

Segue de (1) e (2) que $p_T = 3000$ e $p_P = 4500$. Portanto, há três anos, a soma das duas populações era 7500 pessoas .

Resposta: (E)

9. Denote por x e y as medidas dos lados desses triângulos, sendo x a medida dos lados iguais. Logo $2x + y = 15$ e pela desigualdade triangular, $y < 2x$. Segue que os únicos valores possíveis para o par (x, y) são $(4, 7), (5, 5), (6, 3)$ e $(7, 1)$. Portanto, existem 4 triângulos isósceles nas condições do exercício.

Resposta: (C)

10. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que a medida y deve satisfazer

$$(4 - y)^2 + (4,5)^2 = 5^2.$$

Assim, obtemos uma equação de grau dois em y, a saber, $y^2 - 8y + \frac{45}{4} = 0$. Pela fórmula de Bhaskara, $y = 4 - \frac{\sqrt{19}}{2}$. Ainda, como $4 < \sqrt{19} < 5$, segue $-\frac{5}{2} < -\frac{\sqrt{19}}{2} < -2$ e $\frac{3}{2} < y = 4 - \frac{\sqrt{19}}{2} < 2$. Ou seja, $y > 1,5$.

Resposta: (A)