V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível I

6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 15 a 17 de setembro de 2010

- **Cada questão vale 01 ponto (total de pontos do nível I-fase de seleção = 10 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova e os rascunhos dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 27 de setembro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 30 de setembro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO

No da Questão	Resposta
Questão No 1	E
Questão No 2	A
Questão No 3	A
Questão No 4	C
Questão No 5	D
Questão No 6	E
Questão No 7	B
Questão No 8	B
Questão No 9	D
Questão No 10	C

1. Seja N o número de degraus da escada. Dado que o bombeiro está num degrau que indica o meio da escada, temos que N é ímpar, isto é, $N = 2m + 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$. O bombeiro sobe 3 degraus, mas em seguida desce 5; então ele fica 2 degraus abaixo do meio da escada. Minutos depois ele sobe 7 degraus ficando, então, 5 degraus acima do meio da escada. Por fim, ele sobe mais 7 degraus até o fim da escada; então, ele fica 12 degraus acima do meio da escada. Concluímos, que $m = 12$ e, portanto, $N = 25$.

   Resposta: (E)

2. $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4 = 4 \cdot 2^6 - 2^8 = 2^2 \cdot 2^6 - 2^8 = 2^8 - 2^8 = 0$.

   Resposta: (A)

3. Vamos reescrever o problema apenas no horário de Brasília. Devido ao fuso horário de 4 horas, o avião pousa em Frankfurt às 10h30min (no horário de Brasília). Como o avião decolou do aeroporto de Guarulhos (SP) às 23h15min (horário de Brasília), a duração do voo é de 11h15min.

   Resposta: (A)

4. Como o máximo divisor comum (mdc) entre as idades é 9, elas devem ser um múltiplo de 9, ou seja, $9, 18, 27, 36, 45, 54, 63$ ou 72. Logo, temos apenas três possibilidades, 9 e 72, 18 e 63, 36 e 45. Observe que 27 e 54 não satisfaz as hipóteses do problema, pois $mdc\{27, 54\} = 27$.

   Resposta: (C)

5. Podemos observar que a cada 4 etapas, sendo uma etapa o deslocamento de uma casa para a outra seguindo o trajeto da figura, o coelho volta para a posição inicial. Logo, considerando que $2007 = 501 \times 4 + 3$, após $501 \times 4 = 2004$ vezes, o coelho estará na casa 5. Contando mais 3 etapas, o coelho estará na casa 4

   Resposta: (D)

6. Tendo 43 garrafas vazias uma pessoa consegue num primeiro momento obter 10 litros de leite e ainda sobram 3 garrafas vazias. Após consumir todo o leite a pessoa terá, então, 13 garrafas vazias; isto permite que esta pessoa obtenha mais 3 litros de leite e ainda tenha 1 garrafa vazia. Consumindo mais uma vez todo o leite a pessoa terá 4 garrafas vazias e, então, consiguirá obter mais 1 litro de leite. No total a pessoa conseguiu 14 litros de leite.

   Resposta: (E)

7. Consideremos $N = ab$, o qual invertido se torna um número ímpar, isto é, $M = ba$ é ímpar. Logo, a não pode ser par e, portanto, para a temos as seguintes possibilidades: 1, 3, 5, 7, 9. Porém, como ab é o quadrado de um número natural as únicas duas possibilidades para N são: 16 ou 36. Daí,

   $$M - N = 61 - 16 = 45 \quad \text{ou} \quad M - N = 63 - 36 = 27 = 3^3;$$

   sabemos, por hipótese, que $M - N$ é o cubo de um número natural; logo, $M - N = 27$. Portanto, $N = 36$ e $a + b = 9$.

   Resposta: (B)

8. Seja N o número de crianças. Então, temos:

(1) $$N = 6n + r, \text{ sendo } 0 < r \leq 6,$$

e

(2) $$N = 48m + s \text{ sendo } 0 < s \leq 48.$$

Em (1) a escola pagaria $60(n+1)$ reais, enquanto em (2) a escola pagaria $237 + 120(m+1)$ reais.

Queremos saber qual o menor n tal que $60(n+1) > 237 + 120(m+1)$. Temos:

$60(n+1) > 237+120(m+1) \Rightarrow 60n+60 > 237+120m+120 \Rightarrow 60n > 297+120m \Rightarrow$

$$n > \frac{297}{60} + 2m > \frac{297}{60} > \frac{240}{60} = 4;$$

logo, o menor n é $n = 5$. Portanto, como $r \geq 1$, o número mínimo de crianças que fará a escola preferir a empresa de ônibus é $N = 6 \times 5 + 1 = 31$.

Resposta: (B)

9. Somar cinco números consecutivos é equivalente a somar, para algum n,

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) = 5n + 15 = 5(n+3).$$

Sabemos que $5(n+3)$ tem final 0 ou 5; por hipótese, $5(n+3) = 200*$, sendo que $*$ não é zero; logo, $* = 5$.

Resposta: (D)

10. Note que

- $1 + 10 = 11$ e, portanto, a soma dos algarismos de $1 + 10$ é igual a $2 = 1 + 1$;
- $1 + 10 + 10^2 = 1 + 10 + 100 = 111$ e, portanto, a soma dos algarismos de $1 + 10 + 10^2$ é igual a $3 = 2 + 1$;
- $1 + 10 + 10^2 + 10^3 = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111$ e, portanto, a soma dos algarismos de $1 + 10 + 10^2 + 10^3$ é igual a $4 = 3 + 1$;
- seguindo o raciocínio anterior, é fácil vermos que, em geral, a soma dos algarismos de $1+10+10^2+10^3+\ldots+10^n$ é igual a $n+1$. Agora, fazendo $n = 2010$ temos que a soma dos algarismos de $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{2010}$ é igual a $2010 + 1 = 2011$.

Resposta: (C)