USP-FFCLRP
DCM
Prof. Rafael A. Rosales

Redes Bayesianas
PPGCA
21 de maio de 2024

Lista 1: Probabilidade

1 Eventos

Exercício 1. Sejam A, B e C eventos de Ω. Identifique as seguintes equações e frases, unindo cada equação expressa na notação de conjuntos com a correspondente frase na linguagem de eventos,

(a) $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$	(i) A e "B ou C" são incompatíveis
(b) $A \cap B \cap C = A$	(ii) Os eventos A, B, C são idênticos
(c) $A \cup B \cup C = A$	(iii) A ocorrência de A implica a de "B e C"
(d) $(A \cup B \cup C) \setminus (B \cup C) = A$	(iv) A ocorrência de A decorre de "B ou C"

Exercício 2. Sejam A, B, C eventos de Ω. Mostre que $A \setminus (B \setminus C) \neq A \setminus B \cup C$. Encontrar uma expressão mais simples para $A \setminus B \cup C$.

Exercício 3. Sejam A, B e C três eventos em Ω. Encontrar as expressões para os seguintes eventos:

(a) aconteceu somente A
(b) aconteceram A e B mas não C
(c) aconteceram os três eventos
(d) aconteceu ao menos um dos eventos
(e) aconteceram ao menos dois eventos
(f) aconteceu só um dos eventos
(g) ocorreram só dois eventos
(h) não aconteceu nenhum dos eventos
(i) não aconteceram mais de dois eventos

Exercício 4. Dois dados são lançados. Sejam os eventos $E = \{\text{a soma dos dados é impar}\}$[1], $F = \{\text{pelo menos um dado tem o número 1 na face superior}\}$, e $G = \{\text{a soma dos dados é } 5\}$. Descreva os eventos $E \cup F$, $E \cap F$, $F \cap G$, $E \cap F^c$, e $E \cap F \cap G$.

[1] Esta notação é a forma abreviada de $\{\omega \in \Omega : \omega \text{ que apresentam soma impar}\}$. Em geral $\{\varphi\}$ denota o conjunto dos eventos elementares $\{\omega \in \Omega : \omega \in \varphi\}$ onde φ é um predicado qualquer (da lógica de primeira ordem).

2 Espaços amostrais Ω

Exercício 5. Uma caixa contém 3 bolas de gude: uma vermelha, uma verde e uma azul. Considere o experimento que consiste em retirar (ao acaso) uma bola de gude da caixa, colocar outra (de qualquer uma das três cores) e então retirar uma segunda bola da caixa. (i) Descreva o espaço amostral. (ii) Repita considerando que a segunda bola seja retirada sem que a primeira seja substituída.

Exercício 6. Considere sucessivos lançamentos de um dado até que um 6 apareça pela primeira vez, momento em que o experimento é interrompido. (i) Qual é o espaço amostral Ω do experimento? (ii) Seja E_n o evento no qual o dado é lançado n vezes para que o experimento seja finalizado. (ii) Quais pontos de Ω pertencem a E_n? (iii) O que representa o evento

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$$

Exercício 7. A, B e C se alternam jogando uma moeda. Suponha que A jogue a moeda primeiro, então B, então C, então A, e assim por diante. O primeiro a tirar cara vence. O espaço amostral deste experimento pode ser descrito como $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \ldots, 0000\cdots\}$. (i) Interprete Ω. (ii) Defina os seguintes eventos em termos de Ω: $a)$ $A = \{A \text{ vence}\}$, $b)$ $B = \{B \text{ vence}\}$, $c)$ $(A \cup B)^c$.

Exercício 8. Um sistema é formado por 5 componentes; cada um deles ou está funcionando ou está estragado. Considere um experimente que consiste em observar a condição de cada componente. O espaço amostral pode ser descrito como

$$\Omega = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq 5\big\},$$

onde $x_i = 0$ significa que a i-ésima peça esta estragada e $x_i = 1$ que esta funcionando. (i) Quantos são os possíveis resultados deste experimento? (ii) Suponha que o sistema irá funcionar se os componentes 1 e 2 estiverem funcionando, ou se os componentes 3 e 4 estiverem funcionando, ou se os componentes 1, 3 e 5 estiverem funcionando. Seja W o evento em que o sistema irá funcionar. Especifique todos os eventos elementares de W. (iii) Seja A o evento em que os componentes 4 e 5 estão estragados. Quantos eventos elementares fazem parte de A?

Exercício 9. O administrador de um hospital codifica os pacientes atendidos no pronto-socorro de acordo com o fato deles terem ou não plano de saúde ou não (1 se tiverem e 0 se não tiverem) e de acordo com a sua condição, que é classificada como boa (b), razoável (r) ou seéria (s). Considere o experimento que consiste em classificar um paciente. (i) Qual é o espaço amostral deste experimento? (ii) Seja A o evento em que o paciente está em uma condição séria. Especifique os resultados de A (ou seja os eventos elementares que fazem parte de A). (iii) Seja B o evento em que o paciente não possui seguro. Especifique os resultados em B. (iv) Descreva todos os resultados do evento $B^c \cup A$.

3 Simetria

Exercício 10. Um dado equilibrado e jogado duas vezes. Qual é a probabilidade de que: (i) o número 6 ocorre só uma vez, (ii) ambos resultados sejam um número par, (iii) a soma dos resultados é 4, (iv) a soma dos resultados é divisível por 3.

Exercício 11. Suponha que A e B sejam mutuamente exclusivos e tais que $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Qual é a probabilidade de que: (i) ocorra A ou ocorra B? (ii) ocorra A mas não ocorra B? (iii) A e B ocorram? (iv) ocorra só um dos eventos A ou B.

Exercício 12. Dois dados equilibrados são jogados simultaneamente. Qual é a probabilidade dos seguintes eventos: (i) a soma dos resultados é 2, 3 ou 12, (ii) a soma dos resultados é impar, (iii) o produto é impar, (iv) a diferença e impar, (v) o resultado de um dado é menor que o outro, (vi) os resultados serem diferentes e o menor dos dois números é r, para $1 \leq r \leq 6$. [É importante distinguir os dois dados. No caso que isto não seja tomado em conta, o espaço amostral $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i \leq j \leq 6\}$, apresenta 21 possibilidades, $|\Omega| = 21$, cada uma com probabilidades diferentes do caso no qual os dados são diferentes.]

Exercício 13. (i) Qual é a probabilidade de que a carta na posição 14 de baralho (bem embaralhado) seja um ás? (ii) Qual é a probabilidade de que o primeiro ás na pilha de cartas esteja na posição 14?

Exercício 14. Uma urna contem n bolas brancas, b, e n de cor laranja, l. Duas bolas são retiradas ao acaso. (i) Encontrar $\mathbb{P}(bb)$ quando o espaço amostral é formado por todos os pares não ordenados de bolas indistinguíveis. Suponha agora que é considerada a ordem da escolha e que as bolas da mesma cor são distinguíveis (por exemplo, estas se encontram numeradas). (ii) Descreva o espaçõ amostral neste caso. (iii) Qual é a probabilidade de que a primeira bola seja branca? (iv) Qual é a probabilidade das duas serem brancas? (v) A metade das bolas são removidas e colocadas em uma caixa. Se das bolas restantes uma é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de que esta última seja laranja?. (vi) Um dado honesto com n lados é jogado. Se a r-ésima face é o resultado, r bolas são removidas da urna e colocadas num saco. Qual é a probabilidade de que uma bola removida ao acaso do saco seja de cor laranja?

4 Probabilidade (Combinatória)

Mesmo que seja possível obter a resposta por outros médios, todos os cálculos necessários para obter as probabilidades nesta seção devem utilizar argumentos combinatórios. As cinco primeiras questões não envolvem probabilidade.

Exercício 15. Existem 5 hotéis em certa cidade. Se em um dia, 3 pessoas fizerem registro nesses hotéis, qual é a probabilidade de que elas se registrem em hotéis diferentes?

Exercício 16. Qual é a probabilidade de formar a palavra $ABRACADABRA$ se as letras A, A, A, A, A, B, B, C, D, R, e R são escolhidas ao acaso?

Exercício 17. Um grupo de 6 homens e 6 mulheres é dividido aleatoriamente em 2 grupos de 6 pessoas cada. Qual é a probabilidade de que ambos grupos possuam o mesmo número de homens?

Exercício 18. Suponha que você tem dois pares de meias vermelhas, três pares de meias beije, e quatro com um atrativo motivo de arco-íris. Se são escolhida duas meias ao acaso, qual é a probabilidade destas serem do mesmo par?

Exercício 19. Suponha que n bolas sejam distribuídas aleatoriamente entre N compartimentos. Determine a probabilidade de que m bolas caiam no primeiro compartimento. Suponha que todos os N^n arranjos sejam igualmente prováveis.

Exercício 20. Um indivíduo tem n chaves, das quais somente uma abre uma porta. Ele seleciona, a cada tentativa, uma chave ao acaso sem reposição e tenta abrir a porta. Qual é a probabilidade de que ele abra a porta na k-ésima tentativa ($k = 1, 2, \ldots, n$)?

Exercício 21. Um jogo de cartas é bem embaralhado e uma mão de 13 cartas é oferecida a quatro jogadores. Encontrar a probabilidade de que: (i) cada jogador tenha um ás, (ii) um jogador tenha todos os asses. [Sugestão: usualmente em um jogo com cartas, a ordem na qual as cartas são entregues não é importante. Lembre também que as cartas são inicialmente entregues sem reposição. Como contamos o número de elementos dos eventos neste caso?]

Exercício 22. Uma urna contem $4n$ bolas, n das quais são pretas, n roxas, n azuis e n marrons. Se r, $r \geq 4$, bolas são retiradas sem reposiçãoão, qual é a probabilidade de que: (i) ao menos uma bola é preta? (ii) exatamente duas bolas são pretas? (iii) existe ao menos uma bola de cada cor?

Exercício 23. †† De quantas maneiras diferentes r bolas distintas podem ser distribuídas, ao acaso, em n urnas numeradas de 1 a n? Qual é a probabilidade de que pelo menos uma urna tenha duas bolas? Qual é a probabilidade de cada uma conter no mínimo uma bola?

Exercício 24. Você encontra-se jogando Poker e recebe 5 cartas. Um *full house* consta de três cartas do mesmo valor e duas de outro, por exemplo ($\mathbf{2}\clubsuit$, $\mathbf{2}\diamondsuit$, $\mathbf{2}\spadesuit$, $\mathbf{4}\diamondsuit$, $\mathbf{4}\heartsuit$). Uma quadra esta formada por quatro cartas do mesmo valor e uma quinta carta de qualquer outro valor, por exemplo ($\mathbf{5}\clubsuit$, $\mathbf{5}\heartsuit$, $\mathbf{5}\spadesuit$, $\mathbf{5}\diamondsuit, \mathbf{K}\diamondsuit$). O que é mais provável, que você receba um *full house* ou uma quadra? [Sugestão: mesma observação do exercício 21]

Exercício 25. Seis números são escolhidos de um total de 49 (loteria). Qual a probabilidade dos seguintes eventos (i) $A = \{$os números escolhidos são 1, 2, 3, 4, 5, 6$\}$, (ii) $B = \{44$ é um dos números escolhidos$\}$. [Sugestão: A ordem das escolhas não é importante.]

5 Probabilidade Condicional

Exercício 26. Um dado viciado com faces 1, 2, 3 da cor laranja e 4, 5, 6 da cor azul tem probabilidades

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(5) = \frac{1}{9}, \qquad \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(6) = \frac{2}{9}.$$

Se o dado é lançado uma vez, qual a probabilidade de que de que a face superior mostre um número par dado que esta é da cor laranja?

Exercício 27. Considere 3 urnas. A urna A contém 2 bolas brancas e 4 vermelhas, a urna B contém 8 bolas brancas e 4 vermelhas, e a urna C contém 1 bola branca e 3 bolas vermelhas. Se uma bola é selecionado de cada urna, qual é a probabilidade de que a bola escolhida da urna A era branca, dado que exatamente 2 bolas brancas foram selecionadas?

Exercício 28. Dois dados são jogados no cassino, porém e o seu resultado não é mostrado. Suponha que o cassino informa que a face superior de um dos dados é 1, qual a probabilidade da soma dos dois dados ser maior o igual a 5? [Sugestão: quem é Ω? Se uma das faces é 1, quais dos elementos de Ω não são possíveis? quantos sobram?]

Exercício 29. Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O São Paulo ganha um jogo em um dia com chuva com a probabilidade de 0,4; em um dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se ganhou um jogo em novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

Exercício 30. Pedro quer enviar uma carta a Marina. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é de 0,8. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0,9. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de 0,9. Dado que Marina não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

Exercício 31. Dois dados honestos são lançados. Qual é a probabilidade condicional de que pelo menos um deles caia no 6 se os dados caírem em números diferentes?

6 Independência de eventos

Exercício 32. Se A e B são eventos independentes, mostrar que A^c e B são independentes, e então deducir que A^c e B^c também são independentes.

Exercício 33. Seja $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, sendo Ω finito e $\mathscr{A}$ o conjunto dos subconjuntos de Ω. Sejam $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ eventos independentes com $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Obtenha a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos, em termos das probabilidades p_k: (i) a ocorrência de nenhum dos A_k, (ii) a ocorrência de pelo menos um dos A_k, (iii) a ocorrência de exatamente um dos A_k, (iv) a ocorrência de exatamente dois dos A_k, (v) a ocorrência de, no máximo, $n-1$ dos A_k.

Exercício 34. (Independência a pares não implica independência coletiva) Um dado é jogado n vezes. Seja o evento A_{ij}="a i-ésima e a j-ésima jogada tem o mesmo resultado". Mostre que os eventos $\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ são independentes somente quando considerados por pares, isto é, $\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{jn}) = \mathbb{P}(A_{ij})\mathbb{P}(A_{jn})$ mas $\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{jk} \cap A_{ik}) \neq \mathbb{P}(A_{ij})\mathbb{P}(A_{jk})\mathbb{P}(A_{ik})$ se $i \neq j \neq k$.

Exercício 35. † Uma moeda honesta é jogada repetidas vezes. Mostre que os seguintes enunciados são equivalentes ($\Leftrightarrow$):
(a) os resultados de lançamentos diferentes são independentes,
(b) dada qualquer seqüência de caras e coroas, a probabilidade de que a seqüência ocorra nos primeiros m lançamentos é 2^{-m}, sendo m o comprimento da seqüência.