

Exercícios de Cálculo 1

Sumário

1	Números. Desigualdades. Valor absoluto	2
2	Funções	4
2.1	Clasificação de funções	6
2.2	Gráficos	6
2.3	Funções bijetoras, injetoras, sobrejetoras	7
2.4	Funções inversas	7
2.5	Composição de funções	7
3	Limites	8
3.1	Teorema principal, confronto	8
3.2	Limites laterais	9
3.3	Limites de funções trigonométricas	10
3.4	Limites infinitos e limites no infinito	11
4	Continuidade, Teorema do Valor Intermediário	11
5	Derivada	14
5.1	Definição de Derivada	14
5.2	Diferenciabilidade (existência da derivada)	15
5.3	Cálculo de derivadas	15
5.4	Diferenciação logarítmica	17
5.5	Derivação implícita	17
5.6	Diferencial	18
5.7	l'Hôpital	19
6	Aplicações da derivada	19
6.1	Teorema do Valor Médio	19
6.2	Máximos e Mínimos. Gráficos de funções	20
6.3	Série de Taylor	21
6.4	Taxas de variação relacionadas. Máximos e mínimos.	21
7	Respostas para alguns dos exercícios	23

1 Números. Desigualdades. Valor absoluto

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, responda se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira, esboce as idéias de uma demonstração e, se for falsa, dê um contra-exemplo

- () Cada ponto da reta real $\mathbb{R}$ pode ser representado por uma decimal periódica.
- () $\pi = 22/7$.
- () Se $z \in \mathbb{Z}^+$ e $x < y$, então $xz < yz$. ($\mathbb{Z}^+$ denota o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$)
- () Se $z \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então $xz < yz$.
- () Se $x > y$, então $|x - y| = x - y$.
- () Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ temos $|x + y| = |x| + |y|$.
- () Se a e b são irracionais então $a + b$ é irracional.
- () Se a e b são irracionais, então $a \cdot b$ é irracional.
- () Se a e b são racionais, então $a + b$ é racional.
- () Se a e b são racionais, então $a \cdot b$ é racional.
- () Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$,

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

- () Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
- () Se $x \geq 0$ e $x \leq y$, então $x^2 \leq y^2$.
- () Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $x^3 < y^3 \Leftrightarrow x < y$.
- () $x = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{-1} + 2\sqrt{2}$ é irracional.

Exercício 2. Mostre que se $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. [Sugestão: suponha que $a \cdot b \in \mathbb{Q}$. Mostre que isto leva a uma contradição.]

Exercício 3. Sejam $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mostre que $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. [Sugestão: suponha que $a + b = q \in \mathbb{Q}$ o qual leva a uma contradição.]

Exercício 4. Mostre que $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{2}$ são irracionais.

Exercício 5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Exercício 6. Dê um exemplo de números reais a e b tais que $|a + b| < |a| + |b|$. O que se pode dizer a respeito dos sinais desses números?

Exercício 7. Sejam $a > 0$ e $b > 0$. Mostre que

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Exercício 8. Mostre que se a e b são números racionais tais que $a + b\sqrt{2} \neq 0$, então $(a + b\sqrt{2})^{-1}$ também é dessa forma, isto é, existem números racionais c e d tais que $(a + b\sqrt{2})^{-1} = c + d\sqrt{2}$.

Exercício 9. Determinar $r > 0$ de modo que $(4 - r, 4 + r) \subset (2, 5)$.

Exercício 10. Expresse cada um dos conjuntos abaixo em notação de intervalo:

- (i) $\{x \in \mathbb{R} / 4x - 3 < 6x + 2\}$.
- (ii) $\{x \in \mathbb{R} / |2x - 3| \leq 1\}$.
- (iii) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 1\}$.
- (iv) $\{x \in \mathbb{R} / 3x + 1 < \frac{x}{3}\}$.

Exercício 11. Monstre que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Diga quais propriedades dos números reais foram utilizadas.

Exercício 12. Indicar as propriedades da multiplicação utilizadas na seguinte equivalência

$$2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2.$$

Exercício 13. Determine o conjunto dos valores $x \in \mathbb{R}$ para o qual são válidas as seguintes desigualdades

$$\begin{array}{lll} (i) & 2x - 7 < 0. & (ii) \quad x^2 - 5x > 0. & (iii) \quad x^2 - 5x \leq -6. \\ (iv) & -x^2 + 5x - 20 > 0. & (v) \quad -x^2 + 5x - 20 < 0. & (vi) \quad 4x^2 + 12x + 9 \leq 0. \end{array}$$

Exercício 14. Resolva as seguintes inequações

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{x}{x+2} < 0. & (ii) \quad \frac{x}{x+2} \geq 0. & (iii) \quad \frac{x}{x+2} < 1. \\ (iv) & \frac{2x+1}{1-x} \leq 0. & (v) \quad \frac{2x+1}{1-x} \leq \frac{x+2}{1-x}. & (vi) \quad x^3 - 6x^2 + 11x > 0. \end{array}$$

Exercício 15. Diga e justifique, se é válida a seguinte desigualdade: $|a - 2b| < a + b$, sendo a e b dois números reais positivos. No caso que a desigualdade não seja sempre certa, forneça um exemplo de dois números a, b para os quais não é certa.

Exercício 16. Resolva as seguintes inequações.

$$\begin{array}{ll} (i) & |2x + 3| \leq 1. & (ii) & |2x + 3| \geq 1. \\ (iii) & |2x - 1| + x \leq 2. & (v) & |2x + 4| - |x - 1| \leq 4. \end{array}$$

Exercício 17. Diga e justifique quais das seguintes identidades são verdadeiras e quais não:

$$\begin{array}{lll} (i) & |-a| = a. & (ii) \quad \sqrt{x^2} = x. & (iii) \quad \sqrt{x^2} \pm x. \\ (iv) & \sqrt[3]{x^3} = x. & (v) \quad \sqrt[3]{8} \pm 2. & (vi) \quad 2x + |x + 3| < 8 \Leftrightarrow -8 < 2x + x + 3 < 8. \end{array}$$

Exercício 18. Demonstre que $|x| < 2 \Rightarrow |x - 1| < 3 \Rightarrow |x| < 4$.

Exercício 19. Resolva as seguintes inequações,

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{(x^2 - 1)(2x + 4)}{3(x - 3)} > 0 & (ii) \quad \left| \frac{x - 1}{2 - x} \right| \geq 1 & (iii) \quad \left| \frac{x - 1}{2 - x} \right| < 1 \\ (iv) & \left| 2 - \frac{1}{5x - 1} \right| \geq 1 & (v) & |x^2 - 3| < |2x - 5| \end{array}$$

Exercício 20. (i) Resolva a seguinte inequação $|x + 1| > \sqrt{x^2 - 5}$. (ii) Determine o conjunto dos valores de x tais que $x + 1 = \sqrt{x^2 - 5}$.

Exercício 21. Encontre o conjunto solução das seguintes desigualdades

$$\begin{array}{lll} a) & |1 - 3x| < 5 & b) \quad |x^2 + 3| > 3 & c) \quad x^2 < 9 \\ d) & x^2 > -1 & e) \quad x^2 < 6x - 5 & f) \quad x^3 > 27 \\ g) & 3x + 3 < x + 6 & h) \quad 2x - 1 \geq 5x + 3 & i) \quad \frac{2x - 1}{x + 1} < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
j) \quad (2x+3)(x^2+1) < 0 & l) \quad \frac{x-6}{x+2} \geq 0 & m) \quad \frac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0 \\
n) \quad \frac{8}{x} < x-2 & o) \quad |3x-1| < -2 & p) \quad \frac{3}{x-2} < \frac{1}{2x+1} \\
q) \quad \frac{x^2}{x-2} - 1 \geq \frac{x^2+3}{x^2-4} & r) \quad x^2+2x+2 > 0 & s) \quad |2x-1| < 3 \\
t) \quad |2x-1| < x & u) \quad |x+3| > 1 & v) \quad |x+1| < |2x-1| \\
x) \quad |x^2-4x-5| \geq |x-1| & y) \quad |x-2|+|x-3| < 1 & z) \quad |x^2-4x-5| \leq |2x+1|
\end{array}$$

2 Funções

Salvo seja indicado o contrário, todas as funções nesta lista de exercícios estão definidas no seu domínio natural.

Exercício 22. Um homem de 1,80 metros de altura está parado, ao nível da rua, perto de um poste de iluminação de 4,50 metros que está aceso. Exprima o comprimento de sua sombra como função da distância que ele está do poste.

Exercício 23. Um tanque, com água, tem a forma de um cone circular reto, com vértice apontando para baixo. O raio da base do cone é igual a 9 metros e sua altura é de 27 metros. Exprima o volume da água no tanque como função de sua profundidade.

Exercício 24. Um objeto é lançado, verticalmente, e sabe-se que no instante t segundos sua altura é dada por $h(t) = 4t - t^2$ quilómetros $0 \leq t \leq 4$.

a) esboce o gráfico de $h = h(t)$.

b) Qual a altura máxima atingida pelo objeto? Em que instante essa altura é atingida?

Exercício 25. Os lados iguais de um triângulo isósceles têm medida 2. Se x é a base, expresse a área como função de x .

Exercício 26. Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços, e estes tomam a forma de uma circunferência e de um quadrado. Se x é o lado do quadrado, expresse a área total A englobada pelas duas figuras como função de x . Qual o domínio de A ?

Exercício 27. Pela queima de combustíveis fósseis o homem libera 200 milhões de toneladas métricas de monóxido de carbono (CO) venenoso na atmosfera, cada ano. Apesar disso, a concentração de CO mantém-se entre 0,04 e 0,09 ppm (partes por milhão) no ar ambiental. A principal razão é que microorganismos do solo absorvem CO rapidamente e convertem em dióxido de carbono e/ou metano. Em uma experiência com 10 litros de ar e um pouco de solo, 1443×10^{-6} g de CO foram reduzidas a 47×10^{-6} g no prazo de 3 horas. O decréscimo foi linear. Desenhar o resultado em um sistema de coordenadas retangulares e determinar a equação para o decréscimo de massa de CO.

Exercício 28. Desde o começo do ano, o preço dos pães integrais em um supermercado local tem aumentado a uma taxa constante de 2 centavos por mês. Em primeiro de novembro, o preço atingiu 1,06 reais por unidade. Expresse o preço do pão em função do tempo e determine o preço no começo do ano.

Exercício 29. O valor do imposto de renda retido na fonte é apresentado na seguinte tabela

Base de Cálculo	Alíquota
até R\$ 900,00	isento
de R\$ 900,00 a R\$ 1800,00	15%
acima de R\$ 1800,00	25%

Baseado na tabela acima, construa o gráfico do imposto a pagar em função do rendimento.

Exercício 30. Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços

Número de cópias de um mesmo original	Preço por cópia
de 1 a 19	R\$ 0,10
de 20 a 49	R\$ 0,08
de 50 ou mais	R\$ 0,06

a) Esboce o gráfico da função que associa a cada natural n o custo de N cópias de um mesmo original.

b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável.

Exercício 31. A e B são locadoras de um automóvel. A locadora A cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de 100 reais. A locadora B cobra 80 centavos por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de 200 reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A em função do número de quilômetros a serem rodados.

Exercício 32. Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 20 cm por 20 cm e dobrando-se os lados para cima. Se os quadrados nos cantos do papel possuem lado x cm, escreva o volume total da caixa em função de x . Qual é o domínio desta função?

Exercício 33. Você opera um serviço de excursões que pratica os seguintes preços

- (i) R\$ 200,00 por pessoa, se 50 pessoas (o número mínimo necessário para fechar um grupo) participarem da excursão;
- (ii) Para cada pessoa a mais, até um máximo de 80 pessoas, o preço é reduzido em R\$ 2,00.

Para realizar uma excursão há um custo fixo de R\$ 6000,00 mais R\$ 32,00 por pessoa. Escreva o seu lucro em função do número de pessoas.

Exercício 34. Determine o domínio das seguintes funções

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = (x-1)(x+2) & b) f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{2-x}} & c) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \\
 d) f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+1}} & e) f(x) = \frac{x^3-3x+11}{(2-x)(x-12)} & f) f(x) = \sqrt{|x^3|+1} \\
 g) f(x) = \frac{1}{|x^2-4x-5|} & h) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}} & i) f(x) = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+2}} \\
 j) f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2x-3} & l) f(x) = \sqrt{9-x^2} & m) f(x) = \sqrt{x^2-9}
 \end{array}$$

Exercício 35. Mostre que

$$\sqrt{1+x^2} - |x| = \frac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}.$$

O que você acha que ocorre com a diferença $\sqrt{1+x^2} - |x|$ a medida que $|x|$ cresce?

Exercício 36. Simplifique $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$, com $h \neq 0$, sendo $f(x)$ igual a

$$\begin{array}{llll} (i) f(x) = 5, & (ii) f(x) = 3x^2 - 1, & (iii) f(x) = x^3, & (iv) f(x) = \text{sen}(x), \\ (v) f(x) = \sqrt{x}, & (vi) f(x) = \frac{1}{x+2}, & (vii) f(x) = x^4. & \end{array}$$

Exercício 37. Seja d a distância de $(0,0)$ a (x, y) . Expresse d em função de x , sabendo que (x, y) é um ponto do gráfico de $y = \frac{1}{x}$.

Exercício 38. Uma função f é linear se $f(u+v) = f(u) + f(v)$ e $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ para todo u, v e α . Quais das seguintes funções são lineares?

$$(i) f(x) = 2x, \quad (ii) f(x) = 2x + 3 \quad (iii) f(x) = |x|, \quad (iv) f(x) = x^2.$$

Mostre que se f é linear então $f(0) = 0$.

Exercício 39. Estude o sinal das seguintes funções:

$$\begin{array}{l} a) y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \\ b) y = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80. \\ c) y = x^7 - 5x^6 + 6x^5. \end{array}$$

Exercício 40. Se $f(x) = x^2 + 2x$ achar $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, com $h \neq 0$ e interprete o resultado geometricamente fixando o valor de a e variando h .

Exercício 41. Simplifique a expressão $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, para as seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1}{x^2} & b) f(x) = \sqrt{x} \\ c) f(x) = 3 & d) f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$

Exercício 42. Determine a imagem das funções

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 10 & b) f(x) = 2x^2 - 4 \\ c) f(x) = \frac{1}{x^3} & d) f(x) = x^2 + 3x + 5 \end{array}$$

2.1 Classificação de funções

Exercício 43. Mostre que $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ é par e $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ é ímpar. Mostre, então, que toda função pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar.

Exercício 44. Verifique se as funções são pares, ímpares ou nem pares, nem ímpares

$$(i) f(x) = 5x^3 - 2x \quad (ii) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \quad (iii) f(x) = \cos(x^3 + x^7).$$

2.2 Gráficos

Exercício 45. Esboce o gráfico das seguintes funções

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = |x| & b) f(x) = x^2 & c) f(x) = \left| \frac{1}{x} \right| \\ d) f(x) = |x| + x & e) f(x) = \frac{5}{x} & f) f(x) = |x^2 - x - 6| \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
g) \ f(x) = \sin(1/x) & h) \ f(x) = x \sin(1/x) & i) \ f(x) = x^2 \sin(1/x) \\
j) \ f(x) = 3 - e^{-2x} & k) \ f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^3, & |x| < 1 \\ -x+3, & x \geq 1 \end{cases} & l) \ f(x) = \frac{1}{1+100x^2}
\end{array}$$

Exercício 46. $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual que x . Esboce o gráfico das seguintes funções

$$\begin{array}{lll}
a) \ f(x) = [x] & b) \ f(x) = x - [x] & c) \ f(x) = \sqrt{x - [x]} \\
d) \ f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} & e) \ f(x) = [1/x] & g) \ f(x) = [1/x]^{-1}
\end{array}$$

Exercício 47. Esboce o gráfico da função $f(x) = (-1)^{[x]}$.

2.3 Funções bijetoras, injetoras, sobrejetoras

Exercício 48. Classifique as seguintes funções quanto a serem injetoras, sobrejetoras, bijetoras, limitadas, monótonas ou periódicas.

$$\begin{array}{l}
a) \ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = 1 - x^2; \\
b) \ n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad n(x) = [x]; \\
c) \ f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \operatorname{tg}(x); \\
d) \ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+; \quad g(x) = |x - 1|; \\
e) \ f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]; \quad f(x) = \cos(x) \\
f) \ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = \frac{1}{2} \sin(2\pi x).
\end{array}$$

2.4 Funções inversas

Exercício 49. Faça um estudo (verificar se são monótonas, limitadas, periódicas e determinar o domínio e a imagem) sobre as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante, cotangente. É possível definir as funções inversas dessas funções trigonométricas para alguns valores do domínio? Se for possível descreva o domínio e o gráfico dessas funções.

Exercício 50. Encontre a fórmula para a função inversa, f^{-1} , de cada uma das seguintes funções: (i) x^3 , (ii) $x \cdot |x|$, (iii) x^2 com domínio $(-\infty, 0]$, (iv) x^2 com domínio $(0, \infty)$, (v) $\sqrt{1-x^2}$ com domínio $[0, \frac{1}{2}]$, (vi) $\sqrt{1-x^2}$ com domínio $[-1 : 0]$, e $(x+1)(3-x)^{-1}$.

2.5 Composição de funções

Exercício 51. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1-x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(i) Determine $f \circ f$. (ii) Esboce o gráfico de $f \circ f$.

Exercício 52. Sejam

$$f(x) = -1 + |x - 1|, \quad -1 \leq x \leq 3,$$

$$g(x) = 2 - |x + 1|, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

(i) Determine $f \circ g$. (ii) Determine $g \circ f$.

Exercício 53. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = x^2 + 2x - 2$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$, é possível definir $f \circ g$ e $g \circ f$? Análogo para $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ e $g : (0, 1] \rightarrow [1, \infty)$, dadas por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

Exercício 54. Suponha que $g = h \circ f$. (i) Mostre que se $f(x) = f(y)$ então $g(x) = g(y)$. (ii) No sentido oposto, suponha que f e g são duas funções tais que $g(x) = g(y)$ sempre e quando $f(x) = f(y)$. (iii) Mostre que $g = h \circ f$ para uma função dada h .

3 Limites

Exercício 55. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas, isto é, exibindo uma prova nos casos verdadeiros e dando um contra-exemplo nos casos falsos.

- (i) Se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, então existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
(ii) Pode existir $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ sem que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
(iii) Se existirem $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exercício 56. Forneça um exemplo onde $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 2$ mas $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

3.1 Teorema principal, confronto

Exercício 57. Calcule os seguintes limites

- | | |
|--|---|
| (i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-x} + x}{x + 1}$. | (ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^2 + x - 12}$. |
| (iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{(6-3)\sqrt{x+2}}$. | (iv) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$. |
| (v) $\lim_{x \rightarrow 1} [3x + 1]$. | (vi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x-1}}$. |
| (vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{44} + \sqrt{x + \sqrt{12}} - \sqrt{13}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{4}}$. | (viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$. |
| (ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$. | (x) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$. |
| (xi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$. | (xi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 7x + 1} + 1}{\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} - 1}$. |
| (xiii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$. | (xiv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$. |
| (xv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$. | (xvi) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$. |

Exercício 58. Calcule os seguintes limites utilizando o teorema do confronto

$$\begin{aligned} (i) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x). & \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right). \\ (iii) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos\left(\frac{x^2-1}{|x-1|}\right). & \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right). \\ (v) \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. & \end{aligned}$$

[Observe que $|\sin(x)| \leq |x|$ se $x \in \mathbb{R}$; logo, para (iv) temos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq x - [x] < 1$. Para (v), podemos tomar em conta o limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x[x^{-1}])$]

3.2 Limites laterais

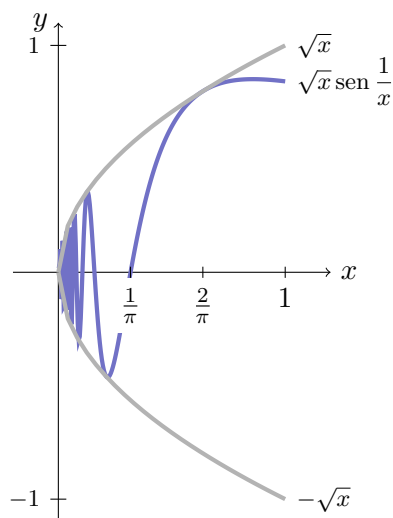
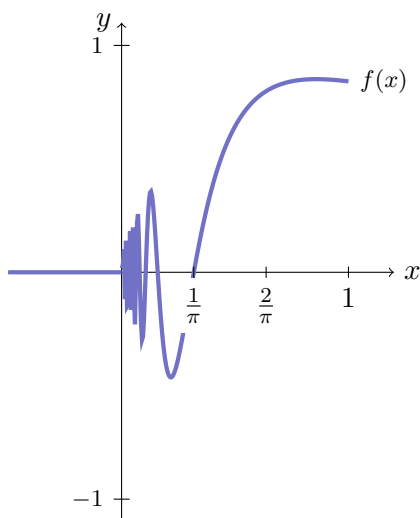
Exercício 59. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} & \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} & \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-1|}{x-1} \\ e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - (x-2)^2, & x > 1 \end{cases} & \\ f) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases} & \\ g) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}, \text{ onde } f \text{ é a função do item f)} & \end{aligned}$$

Exercício 60. Sejam f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} \sin(1/x), & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sqrt{x} \sin(1/x).$$

Ambas as funções f e g são graficadas abaixo.



Seja h qualquer uma das funções f ou g . (i) Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$? Em caso afirmativo, qual é. Justifique utilizando os teoremas sobre limites vistos em aula. Em caso negativo, por que não? (ii) Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$? Em caso afirmativo, qual é. Justifique utilizando os teoremas sobre limites vistos em aula. Em caso negativo, por que não? (iii) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$? Em caso afirmativo, qual é. Justifique utilizando os teoremas sobre limites vistos em aula. Em caso negativo, por que não?

Exercício 61. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}.$$

3.3 Limites de funções trigonométricas

Exercício 62. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}.$$

Exercício 63. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Exercício 64. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\operatorname{sen}(\beta x)}.$$

Exercício 65. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \operatorname{sen}^2(x) - 1}{\cos(2x)}.$$

Exercício 66. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{4x - \pi}{\cos(2x)}.$$

Exercício 67. Calcule

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x) - 2x}\right), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(\pi/2 - 3x)}{x}\right)$$

Exercício 68. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2+x) \cos\left(\frac{1}{2+x}\right), & \text{se } x \neq -2 \\ 0, & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

(i) Monstre que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$.

(ii) Monstre que não existe

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}.$$

Exercício 69. Determine os seguintes limites

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}.$$

Exercício 70. Avalie os seguintes limites em termos do número $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x$. Por exemplo, para $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x)/x$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2\alpha.$$

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x) + 2x}{x + x^2} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} \\ g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} & i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin(x))}{(x + \sin(x))^2} \\ & j) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^3 \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right) \end{array}$$

Exercício 71. (i) Encontre o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio r . Utilize radianes como unidade ao considerar qualquer das funções trigonométricas envolvidas. (ii) Qual é o valor do perímetro quando n é muito grande?

3.4 Limites infinitos e limites no infinito

Exercício 72. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

[Sugestão: considerar a mudança de variável $1/x = u$.]

Exercício 73. Calcular os limites

$$\begin{array}{ll} (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 7}{7x^2 + 2x - 9} & (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x + 7}{7x^2 + 2x - 9} \\ (iii) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} & (iv) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} \\ (v) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 1} & (vi) \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{array}$$

4 Continuidade, Teorema do Valor Intermediário

Exercício 74. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostrar que f é contínua em p .

Exercício 75. A afirmativa

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \rightarrow f \text{ é contínua em } p$$

é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Exercício 76. A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 2, & x = -1 \end{cases}$$

é contínua em $a = -1$? em $a = 0$? Justifique.

Exercício 77. Considere a seguinte função,

$$f(x) = \frac{|3x - 2|}{2 - 3x}.$$

Diga se o limite $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x)$ existe ou não (justifique a sua resposta).

Exercício 78. Seja

$$g(x) = \frac{|3x^2 - 5x - 2|}{x - 2}.$$

Diga se o limite $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ existe ou não (justifique a sua resposta).

Exercício 79. Mostre que para todo $\alpha > 0$, existe um número real x tal que $x^4 - x^2 + 2x = \alpha$.

Exercício 80. Determine os valores de α e β para que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & \text{se } x < -1, \\ \alpha x + \beta, & \text{se } -1 \leq x \leq 2, \\ x^3 + 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

seja contínua.

Exercício 81. Dada a função $f : [-2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2/2, & \text{se } -2 \leq x < 4, \\ 2, & \text{se } 4 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

Pergunta-se: f tem máximo e mínimo no intervalo $[-2, 7]$? E se $f(x) = -4$ para $4 \leq x \leq 7$, ao invés de $f(x) = 2$ para $4 \leq x \leq 7$? Justifique sua resposta.

Exercício 82. Se

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3, & \text{se } x \leq -1, \\ x^2 + a, & \text{se } -1 < x, \end{cases}$$

encontrar o valor de a tal que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ exista.

Exercício 83. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$. Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)}{4x}$$

Exercício 84. Utilizando o Teorema do valor intermédio demonstre que

- (i) A função definida por $f(x) = x^3 + x - 1$ é igual a 0 em pelo menos um ponto do intervalo $(0, 1)$.
- (ii) A equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução.
- (iii) A imagem da função $f : [0, 1] \rightarrow B$ definida pelo mapa $x \mapsto x^3 + x - 1$ é $B = [-1, 1]$.
- (iv) A imagem de $f : \mathbb{R} \rightarrow B$, definida por $x \mapsto x^3 + x$ é $B = \mathbb{R}$.
- (v) Não existe nenhum número $x \in \mathbb{R}$ tal que $(\sqrt{x^2 - 5})^{-1} = 0$.

Exercício 85. $f : A \rightarrow B$ é contínua se, e somente se, f é contínua em todo ponto $x \in \text{Dom}(f)$. Diga e justifique, se as funções a continuação são contínuas ou não. Caso as funções não sejam contínuas, diga quais são os pontos de descontinuidade.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases} & (ii) \quad \frac{\sin(x)}{x} & (iii) \quad \frac{1}{x} \\
 (iv) \quad x^2 - 7x + 2. & (v) \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1, \\ 3, & x = 1, \\ 2, & x = -1. \end{cases} & \\
 (vi) \quad \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}. & (vii) \quad \arctg\left(\frac{1}{x}\right) & (viii) \quad \text{tg}(x).
 \end{array}$$

Exercício 86. Suponha que f satisfaz $f(x+y) = f(x) + f(y)$, e que f é contínua em 0. Mostre que f é contínua em a para todo a .

Exercício 87. Suponha que f é contínua em a e que $f(a) = 0$. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $f + \alpha$ é diferente de zero dentro de um intervalo aberto que contém a .

Exercício 88. (i) Suponha que f não é contínua em a . Mostre que para algum número $\epsilon > 0$, existem números x arbitrariamente próximos de a com $|f(x) - f(a)| > \epsilon$. Faça um desenho que ilustre esta situação. (ii) Conclua que para algum número $\epsilon > 0$ ou existem números x arbitrariamente próximos de a tais que $f(x) < f(a) - \epsilon$ ou os números x se são arbitrariamente próximos de a com $f(x) > f(a) + \epsilon$.

Exercício 89. (i) Mostre que se f é contínua em a , então $|f|$ também é. (ii) Mostre que qualquer função f a qual pode ser escrita como $f = E + O$, onde E é par e contínua, e O é ímpar e contínua. (iii) Mostre que se f e g são funções contínuas, $\min\{f, g\}$ e $\max\{f, g\}$ também são contínuas. (iv) Mostre que qualquer função f contínua pode ser escrita como $f = g - h$, onde g e h são não negativas e contínuas.

Exercício 90. [†] (i) Suponha que f é uma função contínua em l . Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(l).$$

[Sugestão: Pode utilizar diretamente as definições embora é mais simples considerar a função G onde $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, e $G(a) = l$.] (ii) Mostre que se não é assumida a continuidade de f em l , então em geral não vale que $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.

Exercício 91. Definição. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, embora o limite não é igual a $f(a)$, então dizemos que f apresenta uma descontinuidade removível em a .

- (i) Seja $f(x) = \sin(1/x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(0) = 1$. Diga se f apresenta uma descontinuidade removível em 0. O que ocorre se $f(x) = x \sin(1/x)$ quando $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(0) = 1$?
- (ii) Suponha que f apresente uma descontinuidade removível em a . Seja $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$ e suponha que $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Mostre que g é contínua em a .
- (iii) Seja $f(x) = 0$ se x é irracional e seja $f(p/q) = 1/q$ se p/q é irredutível. Identifique a função $g(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$.

- (iv) ^{††} Seja f uma função tal que cada ponto de discontinuidade é uma discontinuidade removível. Isto significa que $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe para todo x , embora f pode ser descontínua em alguns pontos x (inclusive em infinitos pontos). Seja $g(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$. Mostre que g é contínua. (Isto é mais difícil do que a prova para o item (ii).)

5 Derivada

5.1 Definição de Derivada

Exercício 92. O que é $f'(a)$? Explique com suas palavras o que significa dizer que $y = f(x)$ é diferenciável em a . Dé exemplos de funções que não são diferenciáveis e explique porque isso acontece.

Exercício 93. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s(t) = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos. Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo $[3, 4]$, $[3.5, 4]$, $[4, 5]$ e $[4, 4.5]$. Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$. Faça o gráfico de s como função do tempo e desenhe as retas secantes, cujas inclinações são as velocidades médias pedidas e a reta tangente ao gráfico no ponto $(4, 2)$.

Exercício 94. Uma bola move-se, na vertical, onde sua posição é $15 + 10t - 5t^2$ m acima do solo no instante t segundos. Pergunta-se:

- Qual a velocidade da bola, na subida, no instante $t = 0$?
- Quando é que sua velocidade, na subida, é igual a zero?
- Qual a altura máxima que a bola atinge?

Exercício 95. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula no instante $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

Exercício 96. Um objeto é lançado verticalmente do chão para cima com velocidade inicial de 112 m/s e a altura atingida no instante t segundos é $f(t) = 112t - 16t^2$ m. Pergunta-se:

- Quais as velocidades do objeto nos instantes $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$ segundos?
- Em que instante o objeto alcança a altura máxima?
- Em que instante o objeto atinge o chão?
- Com que velocidade o objeto atinge o solo?

Exercício 97. Em cada um dos itens abaixo, encontre, se existir, a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ nos pontos especificados:

- $f(x) = 5x + 4$, $P_1 = (2, 14)$ e $P_2 = (1, 9)$
- $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $P_1 = (0, 4)$ e $P_2 = (1, 2)$
- $f(x) = \sin x$, $P = (0, 0)$
- $f(x) = \cos x$, $P = (\pi/2, 0)$

Exercício 98. Encontre a derivada da função dada usando a definição. Estabeleça o domínio da função e da derivada:

- $f(x) = 4x + 3$
- $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = x^3$

Exercício 99. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

5.2 Diferenciabilidade (existência da derivada)

Exercício 100. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Se $a \neq 0$, encontre $f'(a)$. Mostre que $f'(0)$ não existe e esboce o gráfico de f .

Exercício 101. Esboce o gráfico de $f(x) = x|x|$. Para que valores de x , f é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' .

Exercício 102. Determine se existe ou não $f'(0)$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Exercício 103. Prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.

Exercício 104. Suponha que f é uma função que satisfaz $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$, para todos os números reais x e y . Suponha também que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 1$. Encontre $f(0)$ e $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 105. Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ -x+4, & x > 1 \end{cases}$, não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de f .

Exercício 106. Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 1 \\ 2x+1, & x \geq 1 \end{cases}$, é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de f .

Exercício 107. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = 1/x$ no ponto de abscissa p . Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

Exercício 108. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

5.3 Cálculo de derivadas

Exercício 109. Calcule $f'(x)$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 3x^2 + 5 & \text{b) } f(x) = x^3 + x^2 + 1 & \text{c) } f(x) = 3x^2 - 2x^2 + 4 \\ \text{d) } f(x) = 3x + \sqrt{x} & \text{e) } f(x) = 5 + 3x^{-2} & \text{f) } f(x) = 2\sqrt[3]{x} \\ \text{g) } f(x) = 3x + \frac{1}{x} & \text{h) } f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} & \text{i) } f(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \\ \text{j) } f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} & \text{k) } f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} & \text{l) } f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Exercício 110. Calcule a derivada das seguintes funções.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2+1} & \text{b) } f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} & \text{c) } f(x) = \frac{3x^2+3}{5x-3} \\ \text{d) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{e) } f(x) = 5x + \frac{x}{x-1} & \text{f) } f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x^3+2} \end{array}$$

Exercício 111. Seja

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(i) Determine os pontos do gráfico de g em que as retas tangentes, nestes pontos, sejam paralelas ao eixo x . (ii) Estude o sinal de $g'(x)$. (iii) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. (iv) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de g .

Exercício 112. Seja

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1.$$

(i) Estude o sinal de $f'(x)$. (ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (iii) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f .

Exercício 113. Calcule a derivada das seguintes funções.

a) $3x^2 + 5\cos(x)$	b) $\frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$	c) $x\sin(x)$
d) $x^2\operatorname{tg}(x)$	e) $\frac{x+1}{\operatorname{tg}(x)}$	f) $\frac{3}{\sin x + \cos x}$
g) $\frac{\sec(x)}{3x+2}$	h) $\cos(x) + (x^2 + 1)\sin(x)$	i) $\sqrt{x}\sec(x)$
j) $\frac{x+1}{x\sin(x)}$	k) $x^2 + 3x\operatorname{tg}(x)$	l) $\frac{x + \sin(x)}{x - \cos(x)}$

Exercício 114. Derive as seguintes funções abaixo.

a) $\sin(4x)$	b) $\cos(5x)$	c) $\sin(x^3)$
d) $(\sin(x) + \cos(x))^3$	e) $\sqrt{3x+1}$	f) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$
g) $\sin(\cos(x))$	h) $(x^2 + 3)^4$	i) $\cos(x^2 + 3)$
j) $\operatorname{tg}(3x)$	k) $\sec(3x)$	l) $\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$

Exercício 115. Derive as funções abaixo.

1) $\frac{x+1}{x-1}$	2) $\frac{2x^3+1}{x+2}$	3) $\frac{4x-x^4}{x^3+2}$
4) $x\sin(\sqrt{x^5-x^2})$	5) $\frac{\sqrt[3]{x^2}\cos(x)}{(x^4+\operatorname{tg}^2x+1)^2}$	6) $\sqrt{x\operatorname{tg}^2(x)}$
7) $\frac{\sqrt{x}+\operatorname{cosec}(x)}{x^3+3x^2}$	8) $\sec(\sqrt{x^2+1})$	9) $\frac{x^2\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)}$
10) $x\sin(x)\cos(x)$	11) $\frac{(x+2)^4}{x^4+16}$	12) $\frac{1}{\sin(x-\sin(x))}$
13) $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$	14) $\cotg(3x^2+5)$	15) $\frac{x^2}{\sin(x)\cos(x)}$
16) $\frac{x^3\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{(x^2+1)\cos(x)}$	17) $\frac{\cos(x)\cotg(x)}{\sec(x)-\cos(x)}$	18) $\frac{2\cos(x)}{x^2+x+1}$
19) $\arcsen(x^2)$	20) $(\arcsen(x))^2$	21) $(1-x^2)\operatorname{arctg}(x)$

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| 22) $x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ | 23) $\cos(\ln(x))$ | 24) $\ln \sqrt{x}$ |
| 25) $\ln(e^{-x} + xe^{-x})$ | 26) $\frac{\ln(x)}{(1-x)}$ | 27) $e^{\sqrt{x}}$ |
| 28) $\sin(e^x)$ | 29) $\arcsen(e^x)$ | 30) $\ln(\operatorname{arctg}(x))$ |
| 31) $e^{1/x^2} + \frac{1}{x^2}$ | 32) $\ln(e^x + 1)$ | 33) $e^{\cos(x^3)}$ |

5.4 Diferenciação logarítmica

Exercício 116. Encontre y' e y'' para

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $y = \ln(x)$ | b) $y = \log_{10}(x)$ |
| c) $y = \ln(1 + e^{2x})$ | d) $y = e^{3x+1} \ln(x^2 - 2)$ |

Exercício 117. Use diferenciação logarítmica para encontrar a derivada de :

- | | | |
|-------------------------------|---|---|
| a) $f(x) = (2x+1)^5(x^4-3)^6$ | b) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ | c) $f(x) = x^{\sin(x)}$ |
| d) $f(x) = (\ln x)^x$ | e) $f(x) = x^{e^{\sin(2x)}}$ | f) $f(x) = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}$ |

Exercício 118. Dê uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x-1)$.

Exercício 119. Mostre que existem exatamente duas retas tangentes ao gráfico de $y = (x+1)^3$ que passam pela origem. Escreva suas equações.

5.5 Derivação implícita

Exercício 120. Determine a equação da reta tangente à curva dada, no ponto indicado,

- | |
|---|
| a) $y^2 = x^3(2-x)$, ponto $(1,1)$ |
| b) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, ponto $(3,1)$. |

Exercício 121. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um ponto $a \in \mathbb{R}$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

Exercício 122. Sejam as funções f e g deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f'(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule $g'(0)$.

Exercício 123. Encontre em cada um dos itens abaixo $\frac{dy}{dx}$, onde $y = y(x)$ é dada implicitamente pelas equações,

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\cos^2(x+y) = 1/4$ | b) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$ |
| c) $(y^2-9)^4 = (4x^2+3x-1)^2$ | d) $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$ |
| e) $\sin(xy) + y - x^2 = 0$ | f) $xy + 16 = 0$ |

16. Calcule a derivada segunda das funções abaixo,

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $y = \frac{x}{1-x}$, | b) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$. |
|--------------------------|--------------------------------|

17. Sejam $f(x) = e^x + \ln(x)$ e $h(x) = f^{-1}(x)$. Ache $h'(e)$.

Exercício 124. Mostre que se f é par, então $f'(x) = -f'(-x)$. (Sugestão: considere $g(x) = f(-x)$, encontre $g'(x)$; logo lembre que outra coisa poderia ser g . Um desenho pode ajudar!)

Exercício 125. Mostre que se f é ímpar então $f'(x) = f'(-x)$ (Faça um desenho!).

Exercício 126. Se $f_n(x) = x^n$, e $0 \leq k \leq n$, mostre que¹

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = k! \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Exercício 127. Seja $f(x) = |x|^3$. (i) Encontre $f''(x)$. (ii) Será que $f'''(x)$ existe para tudo $x \in \mathbb{R}$? (iii) Considere agora a função $g(x) = x^4$ para $x \geq 0$ e $g(x) = -x^4$ quando $g(x) \leq 0$. Repeta a análise em (i) e (ii) para g .

Exercício 128. Seja $g(x) = x^n$ para $x \geq 0$ e $g(x) = 0$ quando $x \leq 0$. Mostre que $g^{(n-1)}$ existe, embora $g^{(n)}(0)$ não existe.

5.6 Diferencial

Exercício 129. Determine a linearização $L(x)$ de f em a para

$$a) f(x) = x^3, \quad a = 1 \quad b) f(x) = 1/x, \quad a = 4.$$

Exercício 130. Encontre o diferencial dy e calcule dy para os valores de x e dx dados:

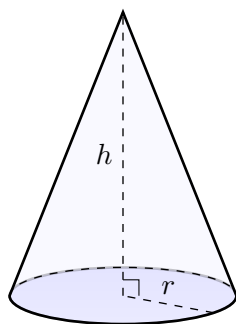
- a) $y = x^2 + 2x$, $x = 3$ e $dx = 0,5$;
- b) $y = (x^2 + 5)^3$, $x = 1$ e $dx = 0,05$;
- c) $y = \cos x$, $x = \pi/6$ e $dx = -0,01$.

Exercício 131. Utilize diferenciais para estimar $\sqrt{36,1}$ e $\sin 59^\circ$.

Exercício 132. A aresta de um cubo mede 30 cm, com um possível erro na medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível em calcular o volume do cubo e a área da superfície do cubo.

Exercício 133. O diâmetro de uma esfera mede 84cm, com erro possível de 0,5 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo na área da superfície calculada e no volume calculado.

Exercício 134. Escreva uma fórmula que estime a variação que ocorre na área da superfície lateral de um cone circular reto quando a altura varia de h_0 a $h_0 + dh$ e o raio não se altera.



¹Lembre que $\binom{n}{k}$ corresponde ao coeficiente Binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Estes coeficientes determinam o número de combinações que podem ser formadas ao escolher k elementos de um total de n .

5.7 l'Hôpital

Exercício 135. Calcule os seguintes limites.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)} & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{100})}{\sqrt[5]{x}} & c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\cotg(x)} \\
 d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}} & f) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) \\
 g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{3}{x} \right) & h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos(x)} - \frac{2}{x^2} \right) & i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \\
 j) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} & k) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x} & l) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)} \\
 m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}} & n) \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} & o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x-1} \right)
 \end{array}$$

Exercício 136. Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ e $g(x) = x$. Mostre que

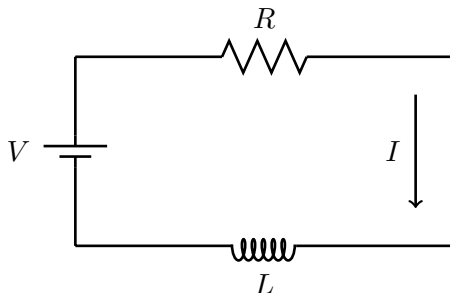
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{e que} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

não existe. Há alguma contradição com a Regra de l'Hôpital? Justifique sua resposta.

Exercício 137. Considere um circuito elétrico constituído por uma força eletromotiva V , um resistor R e um indutor L como mostrado no diagrama. A corrente I em função do tempo é dada pela relação,

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

(i) Se L é a única variável independente, determine $\lim_{L \rightarrow 0^+} I$. (ii) Se R é a única variável independente, determine $\lim_{R \rightarrow 0^+} I$.



Exercício 138. A média geométrica de dois números reais positivos a, b é definida como $\sqrt{ab}$. Utilize l'Hôpital para mostrar que

$$\sqrt{ab} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x.$$

6 Aplicações da derivada

6.1 Teorema do Valor Médio

Exercício 139. 2. Se $f(x)$ é um polinômio qualquer, portanto, $f'(x)$ também é um polinômio. Mostre que entre duas raízes distintas de $f(x)$ existe pelo menos uma raiz de $f'(x)$.

Exercício 140. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha valor máximo local 3 em -2 e valor mínimo local 0 em 1.

Exercício 141. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais e distintas. Localize tais raízes.

Exercício 142. a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que f é uma função constante.

b) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = ce^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Sugestão: considere a função $h(x) = g(x)e^{-x}$ e use (a)).

Exercício 143. Mostre que todo polinômio de grau três tem um único ponto de inflexão.

6.2 Máximos e Mínimos. Gráficos de funções

Exercício 144. Encontre os pontos críticos das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} a)f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x & b)f(x) = \sin^2 x & c)f(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ d)f(x) = x^2 - \frac{2}{x} & e)f(x) = \sqrt{x}(1-x) & f)f(x) = \frac{x}{x^2-9} \end{array}$$

Exercício 145. Para as funções abaixo, encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, os valores de máximo e mínimo locais de f , os intervalos de concavidade e pontos de inflexão:

$$a)f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \quad b)f(x) = x^4 - 6x^2 \quad c)f(x) = \sin^2(x), 0 \leq x \leq 2\pi$$

Exercício 146. Para cada uma das funções encontre os máximos e mínimos locais e globais no domínio dado:

$$\begin{array}{ll} a)f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi] & b)f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, x \in [0, 1] \\ c)f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} & d)f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ e)f(x) = x^4 - x^2 + |x|, x \in [-1, 1] & f)f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, x \in [1, 3] \end{array}$$

Exercício 147. Esboce os gráficos das seguintes funções

$$\begin{array}{lll} a)y = 2 - 15x - 9x^2 - x^3 & b)y = \frac{x}{x-1} & c)y = \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ d)y = \frac{1}{x^3-x} & e)y = \frac{x^2}{x^2+9} & f)y = \frac{x}{x^2-9} \\ g)y = \frac{-x^2}{x^2-9} & h)y = \sqrt{x^2+1} - x & i)y = xe^{-x} \\ j)y = \frac{x^3}{x^2+3x-10} & k)y = \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} & l)y = x^4 - 4x^2 \end{array}$$

Para i) pode considerar que $e^x \simeq 2.7182818^x$.

Exercício 148. As funções $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

são chamadas de *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico*, respectivamente. Mostre que:

a) $\sinh$ é uma função ímpar e $\cosh$ é uma função par;

b)

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x;$$

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

d) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;

e) Defina

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}.$$

Mostre que $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$;

f) Esboce o gráfico de $\sinh$, $\cosh$ e tgh .

6.3 Série de Taylor

Exercício 149. Calcular o polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de x_0 quando:

a) $y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 1$

b) $y = e^x, x_0 = 0$

c) $y = \sin x, x_0 = 0$

Exercício 150. Usando o polinômio de Taylor de ordem 2 do exercício anterior, calcular um valor aproximado e o erro desta aproximação para:

a) $\sqrt[3]{8,2}$

b) $e^{0,03}$

c) $\sin(0,1)$

Exercício 151. Mostre que para todo x real,

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

6.4 Taxas de variação relacionadas. Máximos e mínimos.

Exercício 152. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 1 km, a 500 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância do avião até a estação está crescendo quando ele está a 2 km além da estação.

Exercício 153. Dois carros iniciam o movimento de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60 km/h e o outro para o oeste a 25 km/h. A que taxa está crescendo a distância entre os dois carros duas horas depois?

Exercício 154. Está vazando água de uma tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000 \text{ cm}^3/\text{min}$. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 metros de altura e seu diâmetro, no topo, é 4 metros. Se o nível da água está subindo a uma taxa de 20 cm/min, quando a altura da água for 2 metros encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

Exercício 155. Um esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30 \text{ cm}^3/\text{min}$, formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha quando está a 10 cm de altura?

Exercício 156. Encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.

Exercício 157. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100m cuja área seja a maior possível.

Exercício 158. Um fazendeiro com 750 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em 4 partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual a maior área total possível das 4 partes?

Exercício 159. Se 1200 cm^2 de material estivessem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

Exercício 160. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3 . O comprimento é o dobro da largura. O material para a base custa 10 reais por m^2 e o material para o lado custa 6 reais por m^2 . Encontre o custo dos materiais para o mais barato dos contêineres. E se o contêiner tiver uma tampa que é feita do mesmo material usado nos lados?

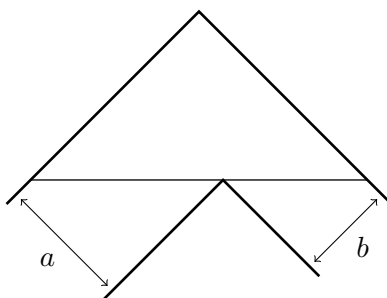
Exercício 161. a) Mostre que de todos os retângulos com uma área dada, aquele com um menor perímetro é um quadrado. b) Mostre que de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com maior área é um quadrado.

Exercício 162. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

Exercício 163. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em 2 partes. Uma parte é dobrada em formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja máxima? (Resp: tudo para o quadrado) E mínima?

Exercício 164. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma 3 vezes mais forte que a outra, são colocadas a 10m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de tal forma a receber o mínimo de iluminação?

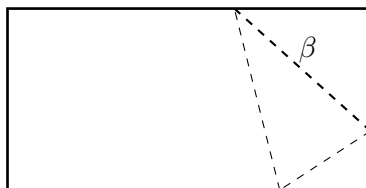
Exercício 165. [†] Dois corredores com largura a e b se encontram formando um ângulo reto conforme se mostra na figura.



Qual é o maior comprimento permitido de uma escada o qual garante que esta ainda possa ser carregada (horizontalmente) de um corredor ao outro?

Exercício 166. [†] Encontre o trapézio de maior área o qual pode ser inscrito em um semi-círculo de raio a , com uma das suas bases sobre o diâmetro do círculo.

Exercício 167. ^{††} A esquina inferior direita de uma folha é dobrada de maneira que esta toca em um ponto a margem esquerda conforme mostrado na figura abaixo.



Se a folha é muito comprida e a sua largura é denotada por α , mostre que o menor comprimento do lado β é $3\sqrt{3}\alpha/4$.

7 Respostas para alguns dos exercícios

Grande parte das respostas pode ser verificada utilizando o site www.wolframalpha.com. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x^3/(x^2 + 3x - 10)$ no domínio $[-5, 4]$ é obtido ao digitar

```
plot(x^3)/(x^2+3*x-10) x from -5 to 4
```

A derivada pode ser obtida como

```
derive (x^3)/(x^2+3*x-10))
```

ou alternativamente como

```
d/dx (x^3)/(x^2+3*x-10))
```

O limite quando x tende a -5 pela esquerda

```
limit x^3/(x^2+3*x -10) x to -5 left
```

`right` em lugar de `left` obtém o limite pela direita. `limit` sem outro argumento após a definição da função fornece o limite, sempre e quando este exista. Caso o limite não exista é obtida a informação “*two-sided limit does not exist*”. Também podemos considerar a resolução de equações, por exemplo

```
solve |x^2-3x+2| > |-2x| for real x
```

determina os possíveis valores de x que satisfazem a inequação modular $|x^2 - 3x + 2| > |-2x|$.

2. Por redução ao absurdo, suponhamos que $ab \in \mathbb{Q}$. Existem neste caso inteiros p_1, q_1 tais que $ab = p_1/q_1$. Se $a \in \mathbb{Q}$, então existem inteiros p, q tais que $a = p/q$, e assim

$$b = \frac{p_1 q}{q_1 p},$$

logo $b \in \mathbb{Q}$, pois $p_1 q$ e $q_1 p \in \mathbb{Z}$, o qual é uma contradição.

3. Por redução ao absurdo, suponhamos que $a + b \in \mathbb{Q}$, logo $a + b = p_1/q_1$ com $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$. Agora, se $a \in \mathbb{Q}$, temos que $a = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e portanto $b = p_1/q_1 - p/q = (p_1 q - p q_1)/(q_1 q)$. Como $p_1 q, p q_1 \in \mathbb{Z}$ temos que $p_1 q - p q_1 \in \mathbb{Z}$. Como $q_1 q \in \mathbb{Z}$, concluímos que $b \in \mathbb{Q}$ o qual é uma contradição.

4. Suponha que $\sqrt{3}$ seja irracional, logo existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $\sqrt{3} = a/b$. Portanto $3b^2 = a^2$ o qual mostra que a^2 é divisível por 3, ou seja, existe k inteiro tal que $a = 3k$. Substituindo obtemos $3b^2 = (3k)^2$ e assim $b^2 = 3k^2$ o qual é uma contradição pois neste caso ambos a e b são divisíveis por 3, logo $\text{mdc}(a, b) > 1$.

Uma análise análoga a anterior (e a utilizada em sala de aula para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional) mostra que $\sqrt{6}$ é irracional. Suponhamos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é racional. Logo $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

também é racional pois $\mathbb{Q}$ é um corpo. Mas isto não é possível pois $\sqrt{6}$ é irracional e portanto também $5 + 2\sqrt{6}$.

Suponhamos que $\sqrt{2} + 1$ seja racional, isto é que existam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\sqrt{2} + 1 = a/b$. Logo $\sqrt{2} = a/b - 1 = (a - b)/b \in \mathbb{Q}$. Claramente uma contradição, pois $\sqrt{2}$ é irracional.

5. Se aplicamos duas vezes a desigualdade triangular obtemos

$$|a + b + c| \leq |a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

7. Para quaisquer $a, b > 0$ temos $(a - b)^2 \geq 0$, logo

$$\begin{aligned}(a - b)(a - b) &= a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Se dividimos por 2 ambos lados da ultima desigualdade obtemos o limitante superior. Do limitante superior por sua vez obtemos

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a + b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{2}{a + b} \leq \frac{\sqrt{ab}}{ab} \Rightarrow \frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab}.$$

11. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = (a^2 + ba) + (ab + b^2) \stackrel{*}{=} [(a^2 + ba) + ab] + b^2 \stackrel{*}{=} [a^2 + (ba + ab)] + b^2 \stackrel{\circ}{=} [a^2 + (ba + ba)] + b^2 = a^2 + 2sb + b^2$. Em $\stackrel{*}{=}$ é utilizada a propriedade associativa da soma, em $\stackrel{\circ}{=}$ a propriedade comutativa da multiplicação.

13. Denotamos por S o conjunto solução. (i) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 7/2\} = (-\infty, 7/2)$. (ii) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 5\} = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$. (iii) $S = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$. (iv) $S = \{\} = \emptyset$. (v) $S = \mathbb{R}$. (vi) $S = \{x \in \mathbb{R} : x = -3/2\} = \{-3/2\}$.

14. (i) $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 0\} = (-2, 0)$. (ii) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x \geq 0\} = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$. (iii) $S = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\} = (-2, \infty)$. (iv) $S = \{x \leq -1/2 \text{ ou } x > 1\} = (-\infty, -1/2] \cup (1, \infty)$. (v) $S = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. De maneira parecida ao exercício (i), a ideia é multiplicarmos ambos lados da desigualdade por $1 - x$, mas devemos considerar dois casos: $1 - x < 0$ ou $1 - x \geq 0$ pois não sabemos qual é o sinal da expressão $1 - x$. Começamos pelo Caso 1: $1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$. Logo

$$\begin{aligned}\frac{2x + 1}{1 - x} \leq \frac{x + 2}{1 - x} &\Leftrightarrow (1 - x)(2x + 1) \geq (1 - x)(x + 2) \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 \geq x + 2 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1\end{aligned}$$

A interseção com o Caso 1, $x > 1$, resulta portanto em $x > 1$. Para o Caso 2: $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{2x + 1}{1 - x} \leq \frac{x + 2}{1 - x} &\Leftrightarrow (1 - x)(2x + 1) \leq (1 - x)(x + 2) \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 \leq x + 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 1,\end{aligned}$$

e assim, considerando a interseção destes valores de x com aqueles no Caso 2 obtemos que no Caso 2 a solução é $x \leq 1$. A resposta está constituída por aqueles x que satisfazem o Caso 1 ou o Caso 2 e assim $\{x > 1\} \cup \{x \leq 1\} = \mathbb{R}$; mas devemos retirar $x = 1$, pois neste caso estaríamos dividindo por 0. Finalmente $S = \mathbb{R} - \{1\}$.

(vi) $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para chegarmos nesta resposta é suficiente escrever $x^3 - 6x^2 + 11x = x(x^2 - 6x + 11)$. O termo x é positivo se $x > 0$ e negativo ou zero no caso contrário. Por outro lado, o discriminante da quadrática $x^2 - 6x + 11$ é $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 < 0$ e o coeficiente de x^2 é positivo, logo a quadrática é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim $x(x^2 - 6x + 11) > 0$ se $x > 0$.

16. (i) $[-2, -1]$. (ii) $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$. (iii) $[-3, 1/3]$. (v) $[-9, 1/3]$.

17. F: falso, V: verdadeiro. (i) F. (ii) F. (iii) F. (iv) V. (v) F. (vi) F.

18. Temos $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$, logo, $|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \Rightarrow |x| < 4$.

19. (i) $S = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$. (ii) $S = [3/2, 2) \cup (2, \infty)$. (iii) $(-\infty, 3/2]$.

(iv) Consideramos primeiro a seguinte propriedade do valor absoluto vista em aula: para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$. Isto é,

$$\left| 2 - \frac{1}{5x - 1} \right| \geq 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{5x - 1} \leq -1 \quad \text{ou} \quad 2 - \frac{1}{5x - 1} \geq 1.$$

Da primeira desigualdade a direita da equivalência temos

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{5x - 1} \leq -1 &\Leftrightarrow \frac{10x - 3}{5x - 1} \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{10x - 3}{5x - 1} + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{15x - 4}{5x - 1} \leq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Analogamente, ao desenvolver a segunda desigualdade a direita obtemos

$$2 - \frac{1}{5x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5x - 2}{5x - 1} \geq 0. \tag{2}$$

Devemos portanto estudar o sinal das expressões à esquerda de cada uma das desigualdades obtidas. Para o primeiro caso consideramos os pontos $x = \frac{4}{15}$ e $x = \frac{1}{5}$,

	$(-\infty, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}]$	$[\frac{4}{15}, \infty)$
$15x - 4$	-	-	+
$5x - 1$	-	+	+
	+	-	+

É importante observar que $x = \frac{1}{5}$ não foi incluído pois nesse ponto teríamos divisão por zero. Por outro lado, incluímos $x = \frac{4}{15}$, pois a desigualdade (1) não é estrita. Desta forma, o conjunto de valores x que satisfaz (1) é $x \in S_1 = (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}]$. Para estudarmos o sinal de (2) consideramos os pontos $x = \frac{1}{5}$ e $x = \frac{2}{5}$,

	$(-\infty, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$	$[\frac{2}{5}, \infty)$
$5x - 2$	$-$	$-$	$+$
$5x - 1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Portanto, o conjunto dos pontos x que satisfazem a segunda desigualdade é $S_2 = (-\infty, \frac{1}{5}) \cup [\frac{2}{5}, \infty)$. Finalmente, a resposta é a união das soluções obtidas em ambos os casos

$$S_1 \cup S_2 = (-\infty, \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}] \cup [\frac{2}{5}, \infty).$$

(v) Analisamos separadamente cada um dos valores absolutos. Para $|x^2 - 3|$, da definição de valor absoluto temos

$$|x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 3 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ ou } x \geq \sqrt{3}, \\ 3 - x^2 & \text{se } x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow |x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Observe que também foi necessário utilizar as propriedades $\sqrt{x^2} = |x|$, e $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$, e $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$. Agora, para $|2x - 5|$ temos

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x \geq \frac{5}{2}, \\ 5 - 2x & \text{se } x < \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Consideramos portanto as seguintes 4 regiões de $\mathbb{R}$ como possíveis valores para a solução x : $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $[\sqrt{3}, \frac{5}{2})$, e $[\frac{5}{2}, \infty)$. Analisamos separadamente cada uma destas possibilidades. Se $x \in (-\infty, -\sqrt{3}]$,

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| < |2x - 5| &\Rightarrow x^2 - 3 < 5 - 2x \\ &\Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \\ &\Rightarrow (x - 2)(x + 4) < 0 \Rightarrow x \in (-4, 2). \end{aligned}$$

A ultima implicação e o resultado de analisarmos o sinal de $(x - 2)(x + 4)$. Assim $x \in S_1 = (-\infty, -\sqrt{3}] \cap (-4, 2) = (-4, -\sqrt{3}]$. Se $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| < |2x - 5| &\Rightarrow 3 - x^2 < 5 - 2x \\ &\Rightarrow 0 < 2 - 2x + x^2 \\ &\Rightarrow 0 < (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

portanto $x \in S_2 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{R} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Se $x \in [\sqrt{3}, \frac{5}{2})$,

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| < |2x - 5| &\Rightarrow x^2 - 3 < 5 - 2x \\ &\Rightarrow (x - 2)(x + 4) < 0 \Rightarrow x \in (-4, 2), \end{aligned}$$

logo $x \in S_3 = (-4, 2) \cap [\sqrt{3}, \frac{5}{2}) = [\sqrt{3}, 2)$. Por ultimo, se $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$,

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| < |2x - 5| &\Rightarrow x^2 - 3 < 2x - 5 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 + 1 < 0 \\ &\Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

e $x \in S_4 = \emptyset \cap (\frac{5}{2}, \infty) = \emptyset$. A solução geral corresponde ao conjunto de pontos x pertencentes a união $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, isto é

$$x \in (-4, -\sqrt{3}] \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, 2] = (-4, 2).$$

20. (ii) $S = \{\emptyset\}$. O motivo é o seguinte. Elevando ao quadrado cada lado da igualdade obtemos $(x+1)^2 = x^2 - 5$, e assim $x = -3/2$. Entretanto, o valor $x = -3/2$ não é possível pois $\sqrt{x^2 - 5}$ possui domínio natural $(-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$ e $-\sqrt{5} < -3/2 < \sqrt{5}$.

21. a) $(-4/3, 2)$; b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $(-3, 3)$; d) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; e) $(1, 5)$; f) $(3, \infty)$; g) $(-\infty, 3/2)$; h) $(-\infty, -4/3)$; i) $(-1, 1/2)$; n) $(-2, 0) \cup (4, \infty)$; p) $(-\infty, -1) \cup (-1/2, 2)$; q) $(-2, -1) \cup (2, +\infty)$; x)

$$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{41}}{2}, \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{41}}{2}, \infty\right).$$

Para chegarmos neste último resultado podemos proceder da seguinte maneira. Analisamos primeiro cada um dos valores absolutos separadamente. Para $|x^2 - 4x - 5|$, consideramos a fatoração

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

e assim o seguinte estudo de sinal

	$(-\infty, -1)$	$[1, 5)$	$[5, \infty)$
$x - 5$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
	+	-	+

Logo $x^2 - 4x - 5$ assume valores não negativos se $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ e negativos se $x \in (1, 5)$. Analisamos agora o valor absoluto a direita da desigualdade, da definição de valor absoluto,

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x - 1 \geq 0, \\ -x + 1, & \text{se } x - 1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x + 1, & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

As expressões dentro dos valores absolutos mudam portanto de sinal em três lugares: em -1 , 1 e 5 . Sendo assim, consideramos quatro casos para podermos ‘abrir os valores absolutos’: $x < -1$, $-1 \leq x < 1$, $1 \leq x < 5$, e $x \geq 5$.

Caso 1: $x < -1$. $x^2 - 4x - 5$ é positiva e $x - 1$ é negativa para estes valores de x , logo a inequação neste caso assume a forma

$$x^2 - 4x - 5 \geq -x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right) \geq 0.$$

Um estudo de sinal mostra que o valores de x que satisfazem esta inequação são aqueles pertencentes ao conjunto $(-\infty, (3 - \sqrt{33})/2] \cup [(3 + \sqrt{33})/2, \infty)$. Como os valores de x também pertencem ao domínio determinado pelo Caso 1, concluímos que

$$x \in \left\{\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{33}}{2}, \infty\right)\right\} \cap (-\infty, -1) \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right].$$

Caso 2: $-1 \leq x < 1$. Neste caso $x^2 - 4x - 5$ assume valores negativos e $x - 1$ também, logo a inequação é da forma

$$-x^2 + 4x + 5 \geq -x + 1 \Rightarrow -x^2 + 5x + 4 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right) \geq 0.$$

Um estudo de sinal mostra que os valores de x que satisfazem a ultima desigualdade são aqueles que pertencem ao conjunto $[(5 - \sqrt{41})/2, (5 + \sqrt{41})/2]$, porém de acordo ao Caso 2 temos que

$$x \in \left[\frac{5 - \sqrt{41}}{2}, \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \right) \cap [-1, 1) \Rightarrow x \in \left[\frac{5 - \sqrt{41}}{2}, 1 \right).$$

Caso 3: $1 \leq x < 5$. Neste caso $x^2 - 4x - 5$ é negativa e $x - 1$ é positiva, logo devemos considerar

$$-x^2 + 4x + 5 \geq x - 1 \Rightarrow -x^2 + 3x + 6 \geq 0.$$

De forma parecida ao obtido no Caso 1, obtemos que os valores de x que satisfazem a desigualdade acima são aqueles pertencentes ao intervalo j

$$z) (1 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{15}) \cup (1 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{15}).$$

25. $\text{área}(x) = x\sqrt{8 - x^2}/4.$

26. $A(x) = (L - 4x)^2/(4\pi) + x^2$

27. O decrescimo de CO em função do tempo é dado pela lei

$$f(x) = \frac{47 - 1443}{3}x + 1443.$$

O gráfico desta função é apresentado na Figura 1.

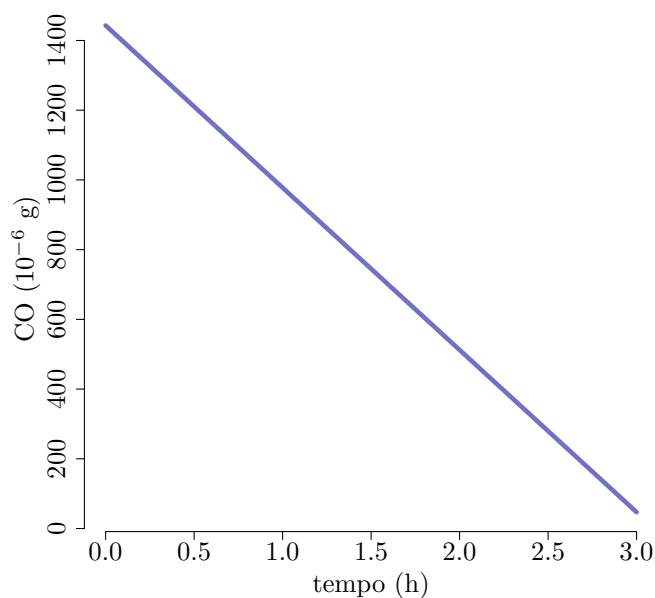


Figura 1: Resposta ao Exercício 27.

33. O lucro é dado pela função $f(n) = 200 \cdot 50 + (200 - 2)n - 32n - 6000$, para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$.

34. a) $\mathbb{R}$, b) $(-\infty, 2)$, c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, f) $\mathbb{R}$, g) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$, h) $\mathbb{R}^+$, i) $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$

35.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} - |x| &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - |x|)(\sqrt{1+x^2} + |x|)}{\sqrt{1+x^2} + |x|} \\ &= \frac{|x|\sqrt{1+x^2} + (\sqrt{1+x^2})^2 - |x||x| - |x|\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + |x|} \\ &= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2} + |x|} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + |x|}.\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade utilizamos a propriedade de valor absoluto $|x||x| = |x|^2 = x^2$. A medida que x aumenta, $1 - x^2$ é aproximadamente igual a x^2 e portanto $\sqrt{1-x^2}$ é aproximadamente $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim para x grande, a diferença $\sqrt{1-x^2} - |x|$ é aproximadamente zero.

36. (iv)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin(x)] &= \frac{1}{h}[\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)] \\ &= \frac{1}{h}[\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)]\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}\right) &= \frac{1}{h} \frac{x+2 - (x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)} = \frac{1}{h} \frac{-h}{(x+h+2)(x+2)} \\ &= -\frac{1}{x^2 + hx + 2h + 4x + 4}.\end{aligned}$$

39. a) observe que o polinômio correspondente a função pode ser fatorado como $(x-5)(x-3)(x-1)$. b) considere a fatoração $5(x-2)(x-1)(x+2)(x^2+4)$. c) considere a fatoração $x^5(x-3)(x-2)$.

40.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 + 2(a+h) - (a^2 + 2a)}{h} \\ 3 &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - a^2 - 2a}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 + 2h}{h} = h + 2a + 2\end{aligned}$$

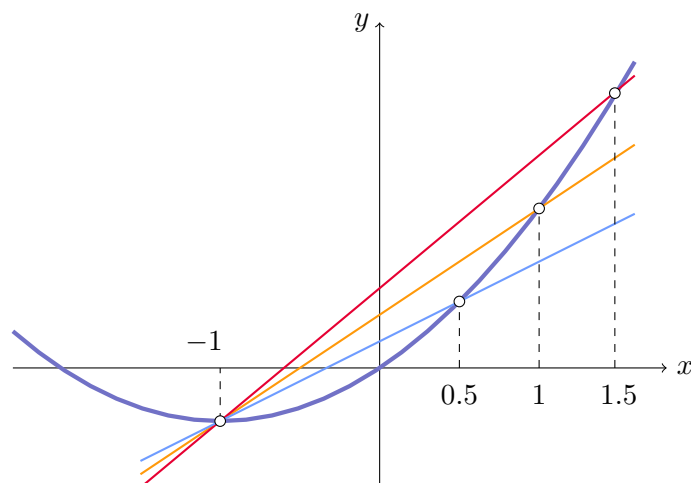
De acordo com o visto em aula, o coeficiente angular α de uma reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Se agora $x_1 = a$, $x_2 = a + h$ e $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(a + h)$, então

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = h + 2a + 2$$

é o coeficiente angular da reta que corta o gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. O gráfico de f e de três retas com coeficiente angular $\alpha = h + 2a + 2$, para $a = -1$ e $h = 2$ (laranja), $h = 2.5$ (vermelho), e $h = 1.5$ (azul claro) são apresentados a seguir.



43. Sejam $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. g é par pois

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x).$$

h é ímpar, uma vez que

$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = \frac{1}{2}[-(f(x) + f(-x))] = -h(x).$$

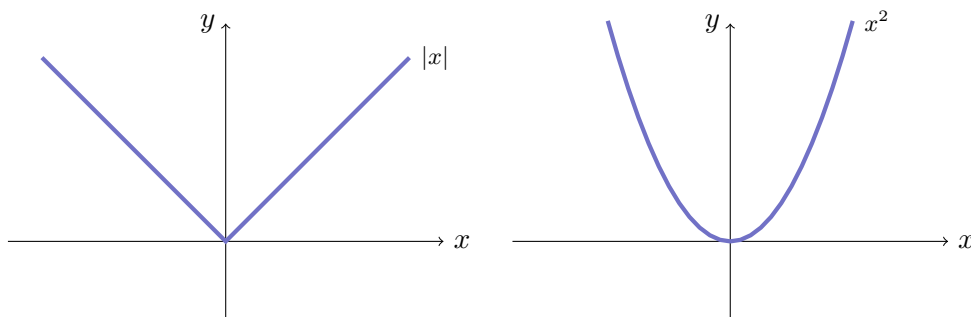
Se somamos g e h obtemos

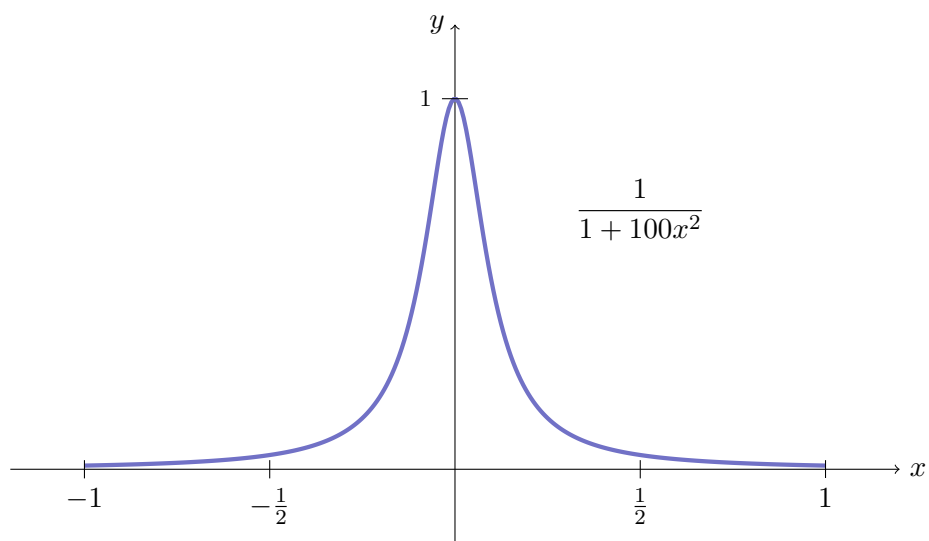
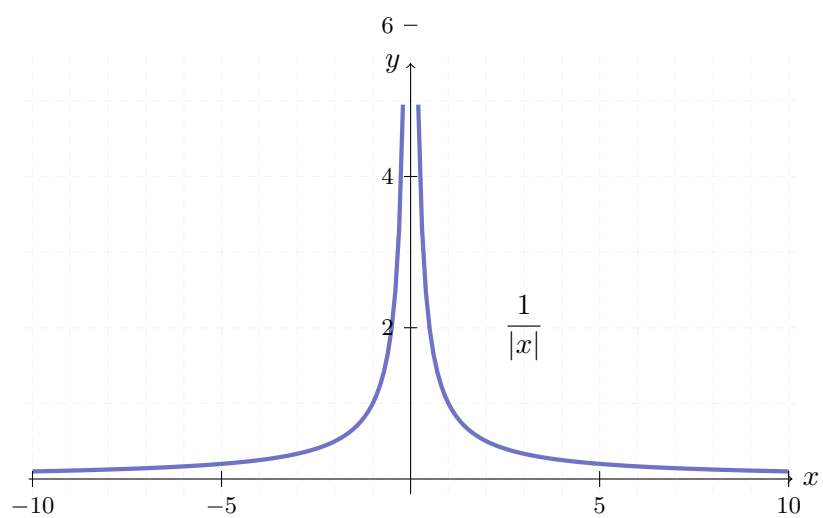
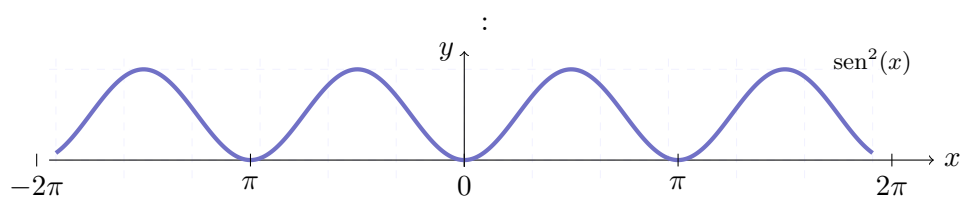
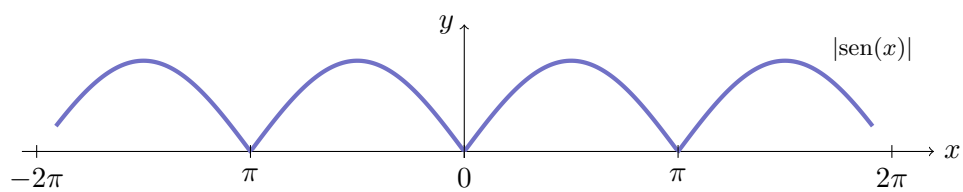
$$g(x) + h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(-x) = f(x),$$

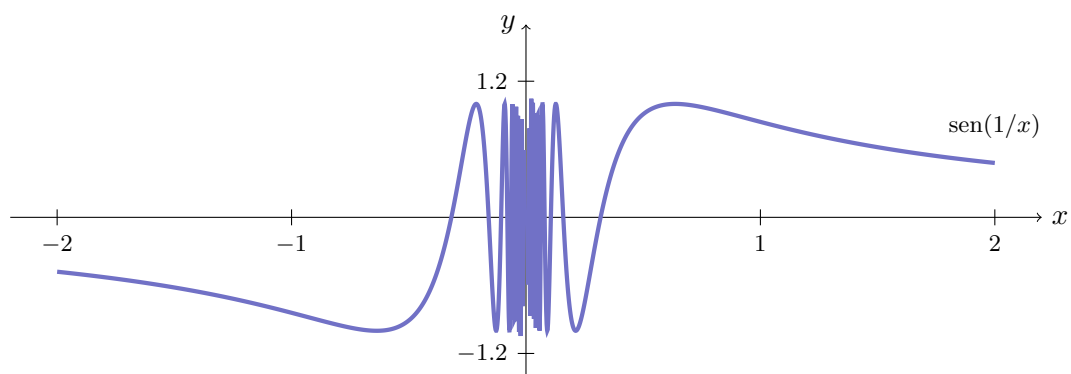
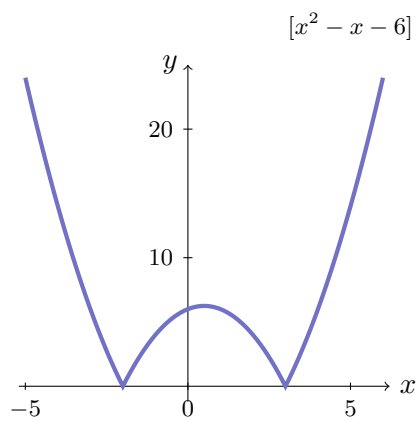
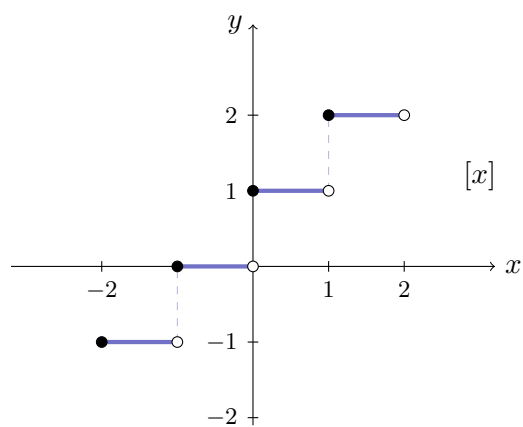
logo, qualquer função f pode ser expressada como a soma de uma função par e outra ímpar.

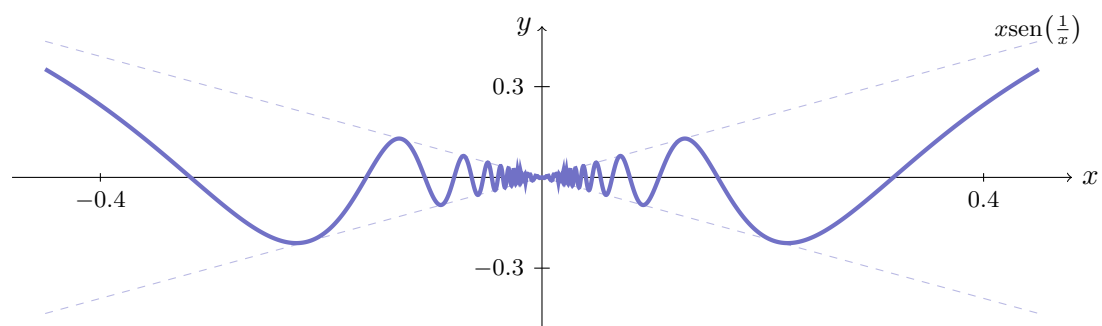
44. (i): $f(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x) = -5x^3 + 2x = -(5x^3 - 2x) = -f(x)$, logo f é ímpar.
(ii) f não é nem par nem ímpar. (iii): $f(-x) = \cos((-x)^3 + (-x)^7) = \cos(-x^3 - x^7) = \cos(-(x^3 + x^7)) = \cos(x^3 + x^7)$. A última igualdade segue pois $\cos$ é par, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. Concluimos portanto que f também é par.

45.

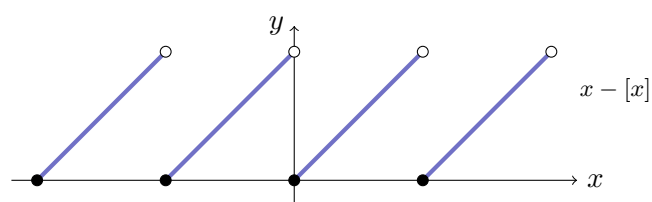
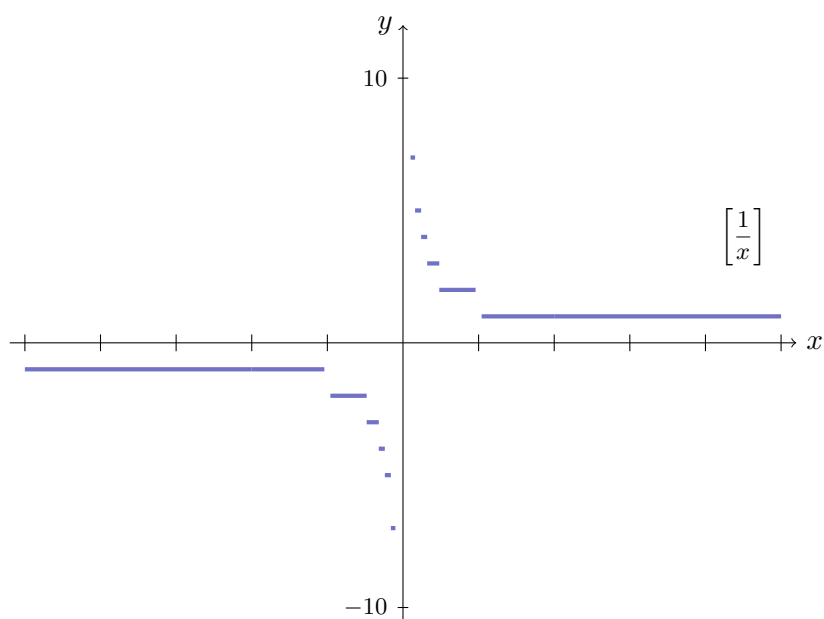




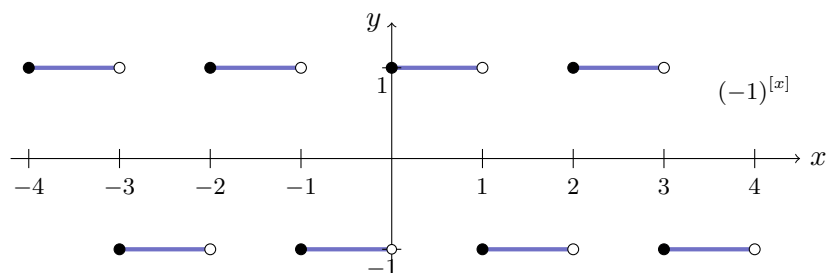




46.



47.



48. a) g não é injetora pois para qualquer $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $g(x) = g(-x)$; logo g não é bijetora. g não é sobrejetora pois $\text{Im}(g) = [0, -\infty)$ difere do contradomínio o qual por definição é $\mathbb{R}$. g é não limitada pois não existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. g não é monótona pois é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$. g não é periódica.

c) n não é injetora: para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem x_1 e x_2 em $[k, k+1)$ tais que $n(x_1) = n(x_2) = k$. Sendo assim, n não é bijetora. n não é limitada. n é monótona crescente e não periódica.

e) f não é injetora pois $f(n) = f(1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. f não é sobrejetora, e não bijetora. Não é monótona pois cresce se $x \in (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, $n \in \mathbb{Z}$, e decresce se $x \in (\frac{1}{4} + n, \frac{3}{4} + n)$, $n \in \mathbb{Z}$. f é periódica e o seu período é 1. Para vermos isto, da definição de periodicidade, devemos achar o menor p tal que

$$\sin(2\pi(x + p)) = \sin(2\pi x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$\sin(2\pi x + 2\pi p) = \sin(2\pi x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Sabemos que a função $\sin$ possui período 2π , ou seja 2π é o menor número tal que $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Logo o valor de p em (3) é $p = 1$.

51. Lembramos que $(f \circ f)(x)$ simplesmente denota $f(f(x))$, a composta de f com si mesma, logo

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(x)^2, & \text{se } f(x) \leq 1, \\ 1 - f(x), & \text{se } f(x) > 1. \end{cases}$$

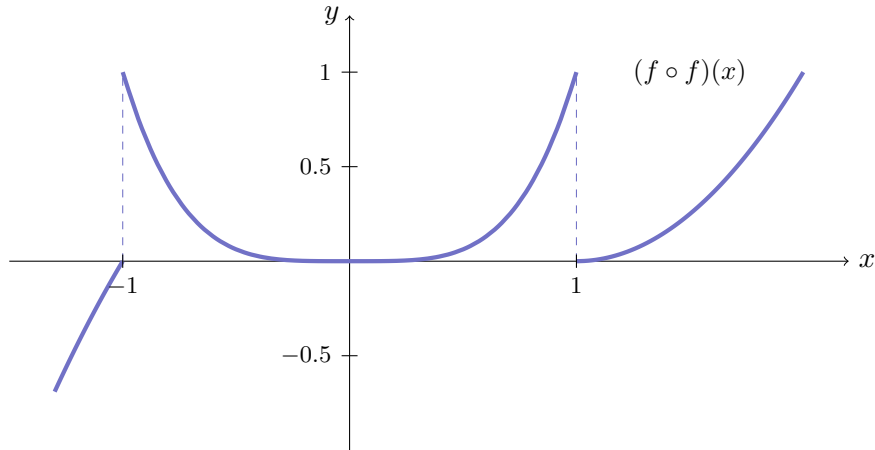
Da definição de f , podemos substituir $f(x)$ por x^2 se $x \leq 1$ ou por $1 - x$ se $x > 1$. Como consequência obtemos

$$f(f(x)) = \begin{cases} (x^2)^2, & \text{se } x^2 \leq 1, \text{ e } x \leq 1, \\ (1 - x)^2, & \text{se } 1 - x \leq 1, \text{ e } x > 1, \\ 1 - x^2, & \text{se } x^2 > 1, \text{ e } x \leq 1, \\ 1 - (1 - x), & \text{se } 1 - x > 1, \text{ e } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^4, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ (1 - x)^2, & \text{se } x > 1, \\ 1 - x^2, & \text{se } x < -1, \\ x, & \text{se } x < 0 \text{ e } x > 1. \end{cases}$$

Observamos que não existe x tal que $x < 0$ e $x > 1$, logo devemos descartar a última parte de $f(f(x))$ descrita acima. A resposta portanto é

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < -1 \\ x^4, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ (1 - x)^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

O gráfico de $f \circ f$ é apresentado abaixo.



51.

$$f \circ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < -1 \\ x^4, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ (1 - x)^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

52. Da definição de valor absoluto temos

$$f(x) = \begin{cases} -1 - (x - 1), & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -1 + x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x - 2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 2 + (x + 1), & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 2 - (x + 1), & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x + 3, & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 1 - x, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Logo

$$f(g(x)) = \begin{cases} -g(x), & \text{se } -1 \leq g(x) < 1, \\ g(x) - 2, & \text{se } 1 \leq g(x) \leq 3 \end{cases}$$

Seguindo a definição de $g(x)$, podemos trocar $g(x)$ por $x + 3$ se $x \in [-2, -1)$, ou por $1 - x$ se $x \in [-1, 2]$. Isto leva as seguintes quatro partes,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \begin{cases} -(x + 3), & \text{se } -1 \leq x + 3 < 1 \text{ e } -2 \leq x < -1 \\ (x + 3) - 2, & \text{se } 1 \leq x + 3 \leq 3 \text{ e } -2 \leq x < -1 \\ -(1 - x), & \text{se } -1 \leq 1 - x < 1 \text{ e } -1 \leq x \leq 2 \\ (1 - x) - 2, & \text{se } 1 \leq 1 - x \leq 3 \text{ e } -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 1, & \text{se } -2 \leq x < -1, \\ -1 + x, & \text{se } 0 < x \leq 2, \\ -1 - x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para chegarmos nisto último observamos que $f(g(x))$ não pode assumir o valor $-(x + 3)$ pois os intervalos $-1 \leq x + 3 < 1$ e $-2 \leq x < -1$ não tem interseção.

54. (i) Se $f(x) = f(y)$, então $g(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = g(y)$. (ii) Se $z = f(x)$, então definimos $h(x) = g(x)$. Esta definição é possível pois no caso em que $z = f(x')$ tem-se $g(x) = g(x')$

do item (i). Se z não é da forma $f(x)$, definimos h de qualquer outra forma (ou simplesmente não definimos h). Neste caso, para todo x no domínio de f tem-se $g(x) = h(f(x))$.

55. (i) Verdadeiro: como $\lim_{x \rightarrow a}(f(x) + g(x))$ existe e $\lim_{x \rightarrow a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, da existência do limite para f concluímos que o limite de g também existe. (iii) verdadeiro: é um fato geral estudado em aula.

56. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq a, \\ -2, & \text{se } x < a. \end{cases}$$

57. A primeira tentativa é utilizar o Teorema principal dos limites. Caso isto leve a uma indeterminação do tipo “0/0”, devemos manipular algebricamente a expressão para tentar remover a indeterminação. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{3}{28}$, (iii) 0.

(iv) Consideramos a troca de variável $y = \sqrt[3]{x}$ o qual implica em $x = y^3$ e se $x \rightarrow -1$ então $y \rightarrow -1$. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + 1}{y^3 + 1}.$$

Observamos que $y^3 + 1 = (y + 1)(1 - y + y^2)$, logo, substituindo

$$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + 1}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + 1}{(y + 1)(1 - y + y^2)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{1 - y + y^2} = \frac{1}{3}.$$

(v) Indefinido, o motivo é o seguinte. Se substituíssemos x por 1 diretamente dentro de $[]$ obtemos $[3 \cdot 1 + 1] = [4]$. Agora, os limites laterais $x \rightarrow 4^-$ e $x \rightarrow 4^+$ são diferentes, pois $[x]$ não é contínua nos inteiros, em particular em 4. O limite portanto não existe.

(vi) Indefinido: os limites laterais $x \rightarrow 2^-$ e $x \rightarrow 2^+$ são diferentes e iguais respectivamente a $+\infty$ e $-\infty$.

(vii)

$$\frac{1}{4} \sqrt[3]{16} (\sqrt{2} \sqrt[4]{3} - \sqrt{13})$$

(viii) $\frac{1}{2}$.

(ix)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2)}{x(1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1} + (\sqrt[3]{1})^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(x) $\frac{1}{3}$, (xi) $\frac{4}{3}$, (xii) $\frac{5}{3}$.

(xiii)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/2} - aa^{1/2}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{a})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

A fatoração da diferença de cubos, $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$, permite escrever a o último limite como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})((\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} x + \sqrt{x}\sqrt{a} + a = 3a.$$

(xiv) Consideramos a seguinte troca de variável $y = \sqrt[n]{x}$. Neste caso $x = y^n$, e no limite quando $x \rightarrow 1$ temos $y \rightarrow 1$. Assim

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^n - 1}.$$

Consideramos agora a seguinte fatoração de $y^n - 1$,

$$y^n - 1 = (y - 1)(1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1}).$$

É relativamente simples verificar isto último, basta desenvolver o produto a direita da igualdade ao utilizar a propriedade distributiva, isto é $(y - 1)(1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1}) = y + y^2 + \dots + y^n - 1 - y - y^2 - \dots - y^{n-1}$. Todos os termos desta soma cancelam salvo y^n e -1 . Substituindo a fatoração no limite resulta

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^n - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1})} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

$$(xv) \frac{\sqrt[n]{a}}{na}, (xvi)$$

$$\frac{n}{m} \sqrt[mn]{a^{n-m}}.$$

59. a) 1, b) -1, c) indefinido (isto segue das respostas a) e b)), d) -1, e) 1, f) = -1, g) = 2.

61. 0.

58. Utilizando o Teorema do confronto: (i) 0, (ii) 0, (iii) 0, (iv) indefinido ou 0?, (v) indefinido ou 1?.

62. 3/2.

63. $2/\pi$ (feito em aula).

64. α/β .

65. -1.

66. Consideramos a troca $y = x - \frac{\pi}{4}$. Neste caso $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ e $4x - \pi = 4y$, e $2x = 2y + \frac{\pi}{2}$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x - \pi}{\cos(2x)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y}{\cos(2y + \frac{\pi}{2})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y}{\cos(2y) \cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(2y) \sin(\frac{\pi}{2})} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{4y}{\sin(2y)} = -2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{\sin(2y)} = -2, \end{aligned}$$

onde na ultima igualdade utilizamos o limite fundamental da função sen.

67. (i) $\cos(1)$, (ii) $\sin(3)$.

68 (i) Lembramos o “Teorema B” visto em aula: sejam $f, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ tais que h é localmente limitada em $a \in A$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) = 0$. Se tomamos $f(x) = \sin(2+x)$ e $h(x) = \cos(1/(2+x))$, pelo Teorema B temos que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)h(x) = 0$. (ii)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(2+x) \cos\left(\frac{1}{2+x}\right)}{x + 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \cos\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{y}\right).$$

O limite não existe pois $\cos(1/y)$ oscila infinitas vezes em qualquer vizinhança de $y = 0$. A segunda igualdade acima segue da troca de variável $y = 2+x$, e a terceira do limite fundamental para a função $\sin$.

69 a) $\sec(a)\tan(a)$. Passo a passo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec(x) - \sec(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(a)} \right) \frac{1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{\cos(x) \cos(a)(x - a)}.$$

Se consideramos a seguinte identidade

$$\cos(a) - \cos(x) = -2 \sin\left(\frac{a+x}{2}\right) \sin\left(\frac{a-x}{2}\right),$$

para o numerador, e no denominados escrevemos $(x - a)$ como $-(a - x)$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec(x) - \sec(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin\left(\frac{a+x}{2}\right) \sin\left(\frac{a-x}{2}\right)}{\cos(x) \cos(a)(a - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{a+x}{2}\right)}{\cos(x) \cos(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)}{\frac{a-x}{2}} \\ &= \frac{\sin(a)}{\cos^2(a)} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \\ &= \frac{\sin(a)}{\cos^2(a)}. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade utilizamos a troca de variável $y = \frac{a-x}{2}$, logo quando $x \rightarrow a$ temos $y \rightarrow 0$.

b) $-\sqrt{3}/3$, c) 0.

70.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x) + 2x}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(x)}{x \cos^2(x)} + 2 \right) / (1 + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 2} = \alpha \cdot 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin(x))}{(x + \sin(x))^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) + 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x + \sin(x)} \right)^2 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x/x}{(x + \sin(x))/x} \right)^2 = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \sin(x)/x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

j) Este limite realmente não envolve α , mas utiliza um dos teoremas visto em sala de aula (por isso a resposta em detalhe aqui). Como

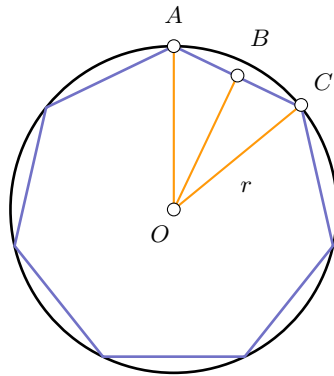
$$-1 \leq \sin \left(\frac{1}{x-1} \right) \leq 1$$

vale para qualquer $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ (em $x = 1$, $\sin(1/(x-1))$ não está definida), e como

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^3 = 0,$$

do “Teorema B” visto em sala de aula obtemos que a resposta é 0, mesmo que $\sin(1/(x-1))$ oscile infinitas vezes entre -1 e 1 em qualquer vizinhança de 1.

71. (i) A figura abaixo mostra um poliedro de n lados inscrito numa circunferência de raio r . O ângulo AOC é $2\pi/n$, logo o ângulo BOC é π/n . Isto implica em $BC = r \sin(\pi/n)$ e $AC = 2r \sin(\pi/n)$, portanto o perímetro necessariamente é $2rn \sin(\pi/n)$.



(ii) Quando n é muito grande consideramos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi 2r \frac{n}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) = 2\pi r \alpha,$$

onde $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x$ (veja o exercício 70). Como $2r\pi$ é o perímetro da circunferência e no limite quando $n \rightarrow \infty$ o perímetro do polígono coincide com o da circunferência, deduzimos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$.